Εφαρμογές του Mathematica στον Λογισμό μιας Μεταβλητής

Νίκος Καραμπετάκης

_Toc90831498

1. Αθροίσματα και γινόμενα στο Mathematica.

Παράδειγμα. Να υπολογίστε τις ακόλουθες ποσότητες στο Mathematica

a) $\sum_{k=1}^{n} k$

b) $\prod_{k=1}^{100} k$

c) $\sum_{k=1}^{n} k^2$

d) $\prod_{k=1}^{100} k^2$

Απάντηση. Οι συναρτήσεις που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό αθροίσματος και γινομένου ακολουθίας αριθμών είναι οι Sum[ακολουθία, {δείκτης, αρχική τιμή, τελική τιμή}] και Product[ακολουθία, {δείκτης, αρχική τιμή, τελική τιμή}] αντίστοιχα.

In[1]:= `Sum[k, {k, 1, n}]`

Out[1]= $\frac{1}{2} n (n+1)$

In[2]:= `Product[k, {k, 1, 100}]`

Out[2]= 933262154439441526816992388562667004907159682643816214685929638⋱
9521759999322991560894146397615651828625369792082722375825118⋱
52109168640000000000000000000000000

In[3]:= `Sum[k^2, {k, 1, n}]`

Out[3]= $\frac{1}{6} n (n+1) (2n+1)$

In[4]:= `Product[k^2, {k, 1, 100}]`

Out[4]= 870978248908948007941659016194448586556972064394084013421593253⋱
6243379996346583325877967096332754920644690380762219607476364⋱
2894114359201905739606775078813946074899053317297580134329929⋱
8718476460737588943431348338296680151515628085416269176619573⋱
7493173453603519594496000000000000000000000000000000000000000⋱
000000000

Προσπάθησε να δείξεις ότι το άθροισμα $\sum_{k=1}^{n} k^3$ είναι τέλειο τετράγωνο με την βοήθεια του Mathematica. ■

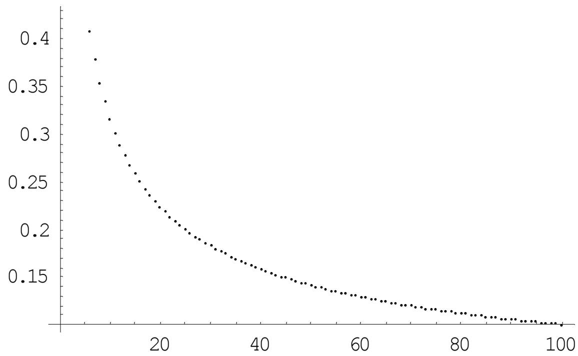
2. Ακολουθίες πραγματικών αριθμών στο Mathematica.

Παράδειγμα 1. Να γίνει η γραφική παράσταση της ακολουθίας $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ για n=1,2,…,100 και στη συνέχεια να υπολογιστεί το όριο της ακολουθίας.
Απάντηση. Με την συνάρτηση Table[] δημιουργούμε αρχικά μια λίστα με τους όρους της ακολουθίας

```
s = Table[1/√n, {n, 1, 100}];
```

και στη συνέχεια με την ListPlot[] εμφανίζουμε την γραφική παράσταση των σημείων αυτών

```
ListPlot[s]
```



Παρατηρούμε από την παραπάνω γραφική παράσταση ότι οι όροι της ακολουθίας πλησιάζουν στο 0 καθώς το n μεγαλώνει. Το όριο της ακολουθίας το υπολογίζουμε με την συνάρτηση Limit[ακολουθία, n->Infinity]

```
Limit[1/√n, n→ Infinity]
```

0

Μπορούμε όμως να χρησιμοποιήσουμε και τον ορισμό της σύγκλισης, δηλ. για κάθε θετικό οσοδήποτε μικρό αριθμό ε π.χ. ε=0.0001, υπάρχει n_0, τέτοιος ώστε $\forall n > n_0, |a_n| \le \varepsilon$. Θα πρέπει λοιπόν να λύσουμε την ανισότητα $|a_n| \le \varepsilon$ για ε=0.0001. Σ'αυτό μπορεί να μας βοηθήσει η συνάρτηση InequalitySolve[] που ανήκει στο πακέτο συναρτήσεων <<Algebra` όπως φαίνεται παρακάτω :

```
e = 10^-4;
<< Algebra`
InequalitySolve[Abs[1/√n] ≤ e, n]
```

$n \le -100000000 \vee n \ge 100000000$

Από την παραπάνω απάντηση έχουμε ότι υπάρχει $n_0 = 10^8$ τέτοιος ώστε $\forall n > 10^8, |a_n| \leq 10^{-4}$.

Επίσης, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists m \in \mathbb{N},\ \forall p > m,\ \forall \nu \in \mathbb{N},\ \left|x_p - x_{p+\nu}\right| < \varepsilon$. Άρα για κάποιο φυσικό ν π.χ. $\nu = 35$ και για κάποιο $\varepsilon > 0$ π.χ. $\varepsilon = 10^{-4}$, ο φυσικός m για τον οποίο ισχύει η παραπάνω πρόταση, μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια της συνάρτησης InequalitySolve του πακέτου Algebra του *Mathematica*. Πράγματι:

```
e = 10^-4; n = 35;
a[n_] := 1/Sqrt[n]
<< Algebra`
InequalitySolve[Abs[a[p] - a[p + n]] < e, p] // N
```

$p > 3111.2$

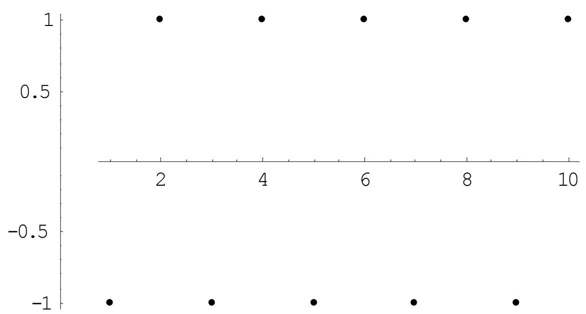
Συνεπώς υπάρχει $m = 3112$ τέτοιο ώστε $\forall p > m,\ \forall \nu \in \mathbb{N},\ \left|x_p - x_{p+\nu}\right| < 10^{-4}$.

Προσπάθησε να δουλέψεις παρόμοια με την ακολουθία $a_n = \dfrac{3n-2}{2n+1}$. ■

Παράδειγμα 2. Να δείξετε γραφικά ότι η ακολουθία $a_n = (-1)^n$ δεν συγκλίνει.

Απάντηση. Όμοια με το προηγούμενο παράδειγμα, έχουμε

```
s = Table[{n, (-1)^n}, {n, 1, 10}];
ListPlot[s, PlotStyle → PointSize[0.02], AxesOrigin → {0, 0}]
```



Από το παραπάνω παράδειγμα φαίνεται εύκολα ότι η ακολουθία συγκλίνει σε δύο διαφορετικά όρια για άρτιες και περιττές τιμές του n αντίστοιχα. ■

Παράδειγμα 3. Να εμφανίσετε γραφικά τις ακολουθίες

$$a_n = \frac{\log(n)}{n}, b_n = \sqrt[n]{n}, c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

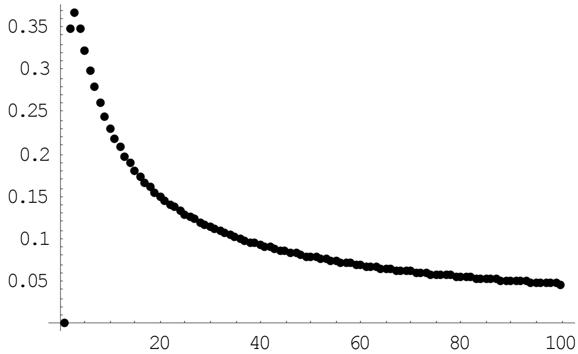
και να υπολογίσετε τα όρια τους.

Απάντηση.

α)

```
a[n_Integer] := Log[n]/n
s = Table[{n, a[n]}, {n, 1, 100}];
```

ListPlot[s, PlotStyle → PointSize[0.02], AxesOrigin → {0, 0}]



Limit$\left[\dfrac{\mathbf{Log[n]}}{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \to \mathbf{Infinity}\right]$

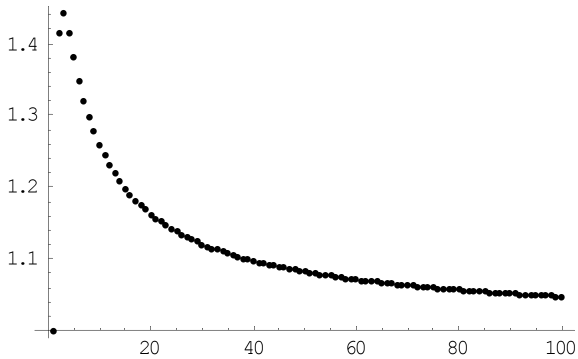
0

β)

a[n_Integer] := $\sqrt[\mathbf{n}]{\mathbf{n}}$

s = Table[{n, a[n]}, {n, 1, 100}];

ListPlot[s, PlotStyle → PointSize[0.015]]



Limit$\left[\sqrt[\mathbf{n}]{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \to \mathbf{Infinity}\right]$

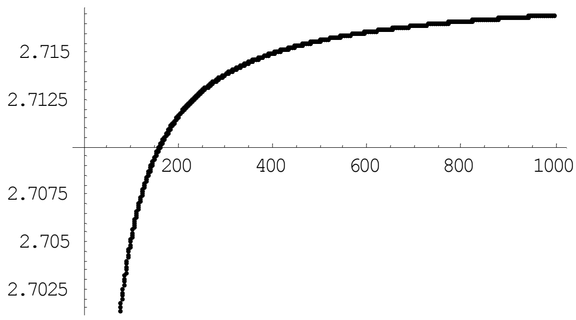
1

γ)

a[n_Integer] := $\left(\mathbf{1} + \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right)^{\mathbf{n}}$

s = Table[{n, a[n]}, {n, 1, 1000}];

ListPlot[s, PlotStyle → PointSize[0.015]]



Limit$\left[\left(\mathbf{1} + \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\right)^{\mathbf{n}}, \mathbf{n} \to \mathbf{Infinity}\right]$

e

■

Παράδειγμα 4. Να δείξετε ότι η ακολουθία $a_n = \dfrac{10^n}{n!}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Απάντηση. Θα προσπαθήσουμε να δείξουμε ότι η ανισότητα $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ ισχύει.

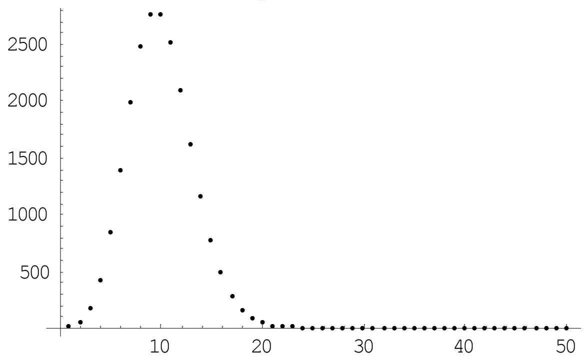
$$\texttt{a[n\_] :=} \frac{\texttt{10}^{\texttt{n}}}{\texttt{n!}}$$

$$\texttt{InequalitySolve}\left[\texttt{FullSimplify}\left[\frac{\texttt{a[n+1]}}{\texttt{a[n]}}\right] < \texttt{1, n}\right]$$

$n < -1 \vee n > 9$

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι η ανισότητα ισχύει για n>9. Η συνάρτηση FullSimplify[] χρησιμοποιήθηκε για να γίνουν όλοι οι δυνατοί μετασχηματισμοί κατά την διαίρεση. Το ότι η ακολουθία είναι φθίνουσα για n>9 φαίνεται και από το διάγραμμα των σημείων της :

```
s = Table[{n, a[n]}, {n, 1, 50}];
ListPlot[s, PlotStyle → PointSize[0.015]]
```



Το όριο της παραπάνω ακολουθίας είναι :

```
Limit[a[n], n → Infinity]
```

0

Παράδειγμα 5. Δίνεται η αναδρομική ακολουθία $a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 3}{3a_n + 2}, a_1 = \dfrac{1}{2}$. Να υπολογίσετε την γενική μορφή της ακολουθίας καθώς και το όριο της ακολουθίας.

Απάντηση. Για τον υπολογισμό της γενικής μορφή της ακολουθίας χρησιμοποιούμε την συνάρτηση RSolve[{σύστημα ακολουθιών},ακολουθία που ψάχνουμε, μεταβλητή ακολουθίας] όπως φαίνεται παρακάτω :

$$\texttt{RSolve}\left[\left\{\texttt{a[n+1]} == \frac{\texttt{2 a[n] + 3}}{\texttt{3 a[n] + 2}}, \texttt{a[1]} == \frac{1}{2}\right\}, \texttt{a[n], n}\right] \texttt{ // FullSimplify}$$

$$\left\{\left\{a(n) \to 1 + \frac{10\,(-1)^n}{-5\,(-1)^n + 3\,5^n}\right\}\right\}$$

Το όριο λοιπόν της ακολουθίας θα είναι :

$$\texttt{Limit}\left[1 + \frac{10\,(-1)^n}{-5\,(-1)^n + 3\,5^n}, \texttt{n} \to \texttt{Infinity}\right]$$

1

Προσπάθησε να υπολογίσεις τον γενικό τύπο της ακολουθίας $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, F_1 = F_2 = 1$ καθώς και το όριο της $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ (λόγος της χρυσής τομής).

3. Σειρές πραγματικών αριθμών στο Mathematica.

Παράδειγμα 1. Υπολογίστε τις σειρές

α) $\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})$

β) $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})$

γ) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$

Απάντηση. Κάνοντας χρήση της συνάρτησης Sum[] υπολογίζουμε τα παραπάνω αθροίσματα :

α)

$\mathbf{Sum}[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}, \{k, 1, n\}]$

$\frac{n}{n+1}$

β)

$\mathbf{Sum}[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}, \{k, 1, \mathrm{Infinity}\}]$

1

γ)

$\mathbf{Sum}[\frac{1}{k^2}, \{k, 1, \mathrm{Infinity}\}]$

$\frac{\pi^2}{6}$

Παράδειγμα 2. Υπολογίστε τις σειρές

a) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k$

c) $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k}$

Απάντηση. Κάνοντας χρήση της συνάρτησης Sum[] υπολογίζουμε τα παραπάνω αθροίσματα :

α)

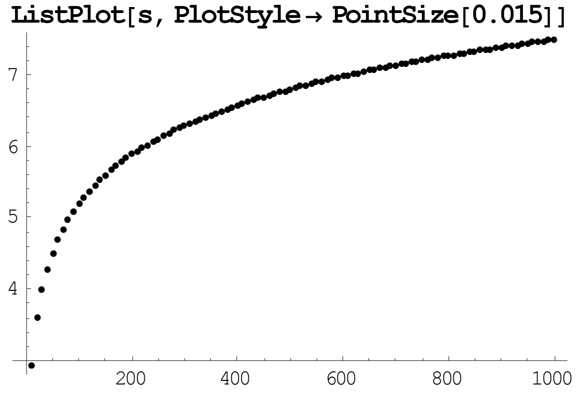
$\mathbf{Sum}[\frac{1}{k}, \{k, 1, \mathrm{Infinity}\}]$

Sum::div : Sum does not converge. More…

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$

Συνεπώς η παραπάνω σειρά δεν συγκλίνει. Παρακάτω δίνουμε μια γραφική παράσταση των όρων της σειράς. Είναι γνωστό ότι η συνάρτηση Sum[1/k,{k,1,n}] υπολογίζει τους n, πρώτους όρους της σειράς. Συνεπώς αν ορίσουμε ως a[n_]:= Sum[1/k,{k,1,n}] την ακολουθία αθροισμάτων, θα μπορέσουμε να σχεδιάσουμε τα αθροίσματα για n=1,2,3,….

```
a[n_] := Sum[1/k, {k, 1, n}]
s = Table[{n, a[n]}, {n, 10, 1000, 10}];
ListPlot[s, PlotStyle → PointSize[0.015]]
```



Από το παραπάνω σχήμα φαίνεται ότι η ακολουθία αθροισμάτων $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ αποκλίνει με αργό τρόπο.

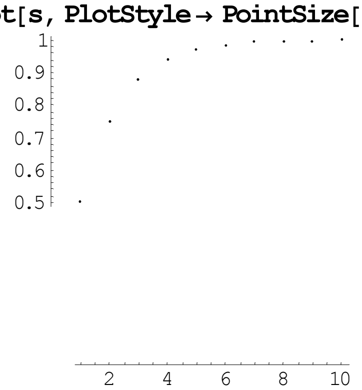
β)

```
Sum[(1/2)^k, {k, 1, Infinity}]
```

1

Παρόμοια με παραπάνω μπορούμε να δούμε με ποιον τρόπο μεταβάλλονται τα αθροίσματα της σειράς γραφικά.

```
a[n_] := Sum[(1/2)^k, {k, 1, n}]
s = Table[{n, a[n]}, {n, 1, 10}];
ListPlot[s, PlotStyle → PointSize[0.02], AxesOrigin → {0, 0}]
```



Βλέπουμε ότι η παραπάνω ακολουθία αθροισμάτων συγκλίνει πολύ γρήγορα στο 1.

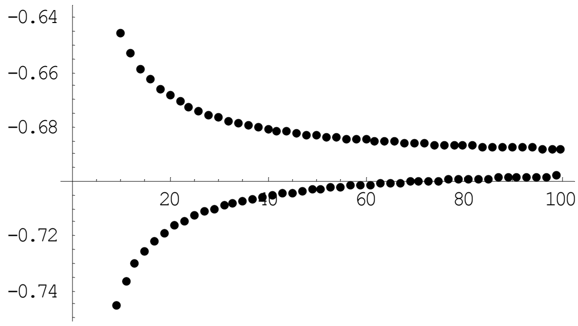
γ)

```
Sum[(-1)^k 1/k, {k, 1, Infinity}]
```

$-\log(2)$

```
a[n_] := Sum[(-1)^k 1/k, {k, 1, n}]
s = Table[{n, a[n]}, {n, 1, 100}];
```

```
ListPlot[s, PlotStyle→ PointSize[0.02]]
```



4. Συναρτήσεις στο Mathematica.

Η δήλωση μιας συνάρτησης μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους, ένας εκ των οποίων και ο παρακάτω :

Όνομα Συνάρτησης[όρισμα$_1$_,όρισμα$_2$_, …., όρισμα$_n$_]:=έκφραση
Όνομα Συνάρτησης[όρισμα$_1$_,….,όρισμα$_n$_]:=(έκφραση$_1$; έκφραση$_2$; …., έκφραση$_m$)

Το σύμβολο = που χρησιμοποιούμε στην ανάθεση τιμών σε μεταβλητές σημαίνει ότι πρώτα υπολογίζουμε την έκφραση δεξιά του ίσον και στη συνέχεια τοποθετούμε το αποτέλεσμα στην μεταβλητή που βρίσκεται αριστερά του ίσον. Αντίθετα το σύμβολο := που χρησιμοποιούμε στην δήλωση της συνάρτησης έχει αναβλητικό χαρακτήρα, δηλαδή η ανάθεση της τιμής δεν γίνεται όταν εκτελείται η συγκεκριμένη εντολή αλλά όταν καλέσουμε την συνάρτηση τοποθετούμε συγκεκριμένες τιμές στα ορίσματα της.

```
f[x_] = Expand[(x+1)^2]
1 + 2 x + x^2
f[1+y]
1 + 2 (1 + y) + (1 + y)^2
g[x_] := Expand[(1+x)^2]
g[1+y]
4 + 4 y + y^2
```

Στα ορίσματα που χρησιμοποιούμε στον ορισμό της συνάρτησης χρησιμοποιούμε το σύμβολο _ για να δηλώσουμε ότι η συγκεκριμένη συνάρτηση δουλεύει για οποιαδήποτε τύπο ορίσματος που θα μπει στη συγκεκριμένη θέση και όχι μόνο για όρισμα που θα έχει το συγκεκριμένο όνομα π.χ.

```
g[x] = x-1
-1 + x
g[x]
-1 + x
g[y]
g[y]
```

```
g[x_] := x-1
g[x]
-1 + x
g[y]
-1 + y
```

Η έκφραση που παρουσιάζεται δεξιά του ίσον στην συνάρτηση μπορεί να είναι μια ή περισσότερες εντολές χωρισμένες με ερωτηματικό και τοποθετημένες μέσα σε παρένθεση. Η συνάρτηση επιστρέφει μια τιμή στο Mathematica. Την τιμή αυτή την τοποθετούμε σε μια μεταβλητή την οποία και παρουσιάζουμε στο τέλος της συνάρτησης (δες μεταβλητή f στο παρακάτω παράδειγμα) ή την επιστρέφουμε με την εντολή Return. Στο παρακάτω παράδειγμα ορίζουμε μια συνάρτηση που υπολογίζει τον n-οστό όρο της ακολουθίας Fibonacci.

```
fibon[n_] :=
 (f1 = 1; f2 = 1;
  Do[f = f1 + f2; f1 = f2; f2 = f, {i, 1, n - 2}];
  f)
fibon[8]
21
```

Η παραπάνω τιμή συμφωνεί με την τιμή που μας δίνει η εντολή Fibonacci του Mathematica :

```
Fibonacci[8]
21
```

Παράδειγμα 1. Ορίστε τις συναρτήσεις

$$f(x) = \cos(x^2 + 1)$$
$$g(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

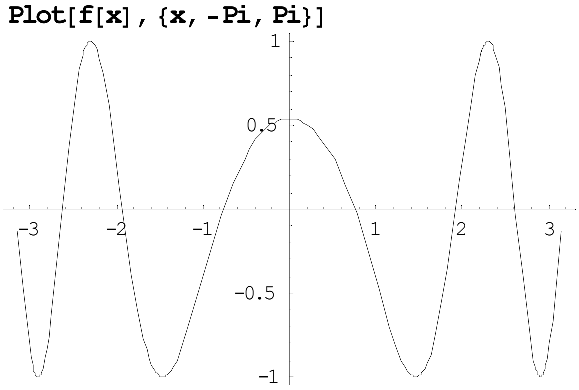
Κάντε τη γραφική τους παράσταση στο διάστημα [-π,π] . Να βρεθούν οι σύνθετες συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ και να γίνουν τα γραφήματά τους.

Απάντηση. Ορίζουμε τις συναρτήσεις με τον τρόπο που ορίσαμε παραπάνω :

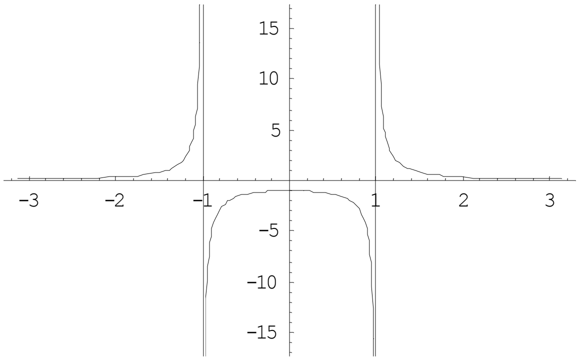
```
f[x_] := Cos[x^2 + 1]
```

και χρησιμοποιούμε την συνάρτηση Plot[συνάρτηση,{μεταβλητή, αρχή πεδίου ορισμού, τέλος πεδίου ορισμού}] :

```
Plot[f[x], {x, -Pi, Pi}]
```

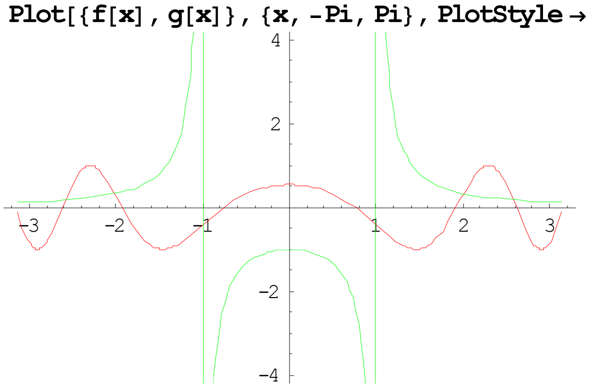



```
g[x_] := 1/(x^2 - 1)
Plot[g[x], {x, -Pi, Pi}]
```



ή μπορούμε να παρουσιάσουμε και τις δύο μαζί τις συναρτήσεις ως εξής :

```
Plot[{f[x], g[x]}, {x, -Pi, Pi}, PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0]}]
```

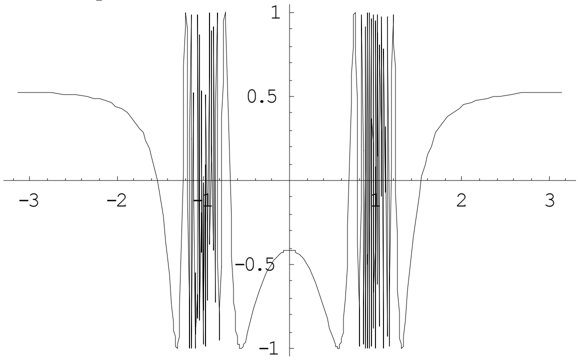


όπου η επιλογή RGBColor[x,y,z] (με $0 \le x, y, z \le 1$) δηλώνει το χρώμα με το οποίο θα σχεδιασθεί η γραφική παράσταση σε αποχρώσεις του κόκκινου (x), πράσινου (y) και μπλε (z). Οι σύνθετες συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ υπολογίζονται με τη συνάρτηση Composition[f,g] και Composition[g,f] αντίστοιχα :

```
fg[x_] := Composition[f, g][x]
fg[x]
```

$$\cos\left(1 + \frac{1}{(x^2 - 1)^2}\right)$$

```
Plot[fg[x], {x, -Pi, Pi}]
```

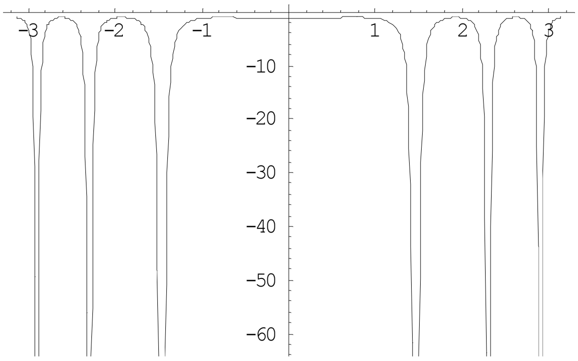


και

```
gf[x_] := Composition[g, f][x]
gf[x]
```

$$\frac{1}{\cos^2(x^2 + 1) - 1}$$

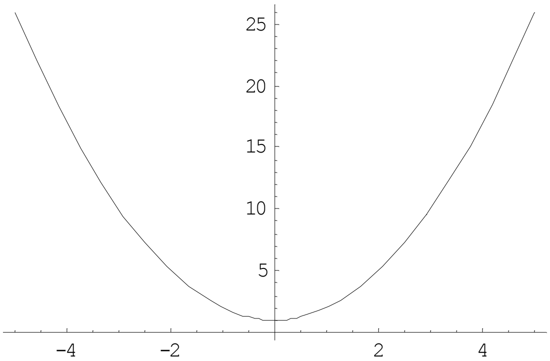
```
Plot[gf[x], {x, -Pi, Pi}]
```



Παράδειγμα 2. Να ορίσετε την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+1$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε την αντίστροφη της παραπάνω συνάρτησης (εφόσον υπάρχει) και να τις σχεδιάσετε μαζί.

Απάντηση. Παρακάτω ορίζουμε την συνάρτηση $f(x)=x^2+1$ και σχεδιάζουμε την γραφική της παράσταση για $x\in[-5,5]$.

```
f[x_] := x^2 + 1
Plot[f[x], {x, -5, 5}]
```



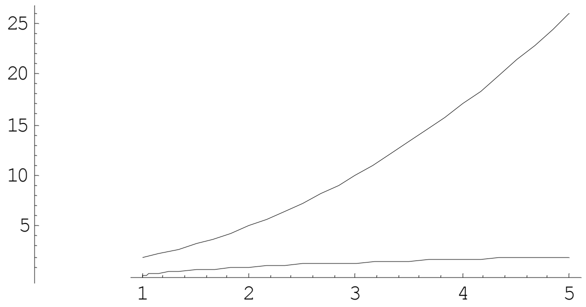
Είναι εύκολο να καταλάβουμε από το παραπάνω σχήμα ότι η αντίστροφη της συνάρτησης δεν υπάρχει στο [-5,5] διότι σε ένα y π.χ. y=5, αντιστοιχούν 2 τιμές του x π.χ. $x=\pm 2$. Αντίθετα υπάρχει η αντίστροφη της συνάρτησης $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+1$. Προσπαθώντας να λύσουμε την $y=x^2+1$ έχουμε ότι :

```
Reduce[y == x^2 + 1, x]
```

$x == -\sqrt{y-1} \lor x == \sqrt{y-1}$

Και συνεπώς μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε ότι η αντίστροφη συνάρτηση της $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+1$ είναι η $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}^+, f^{-1}(x)=\sqrt{x-1}$. Η γραφική παράσταση των δύο αυτών συναρτήσεων στο διάστημα [1,5] είναι η παρακάτω :

```
Plot[{x^2 + 1, √(x - 1)}, {x, 1, 5}, AxesOrigin → {0, 0}]
```



Αν θέλατε να διατηρήσετε τον λόγο των αξόνων σε αναλογία 1:1 θα έπρεπε να προσθέσετε στην παραπάνω εντολή την επιλογή AspectRatio -> Automatic. Παρόμοια θα δουλέψουμε και με το συμμετρικό κομμάτι της f.

Παράδειγμα 3. Να κάνετε την γραφική παράσταση :

α) των τριγονομετρικών συναρτήσεων $\sin(x), \cos(x), \tan(x)$ στο διάστημα [0,2π],

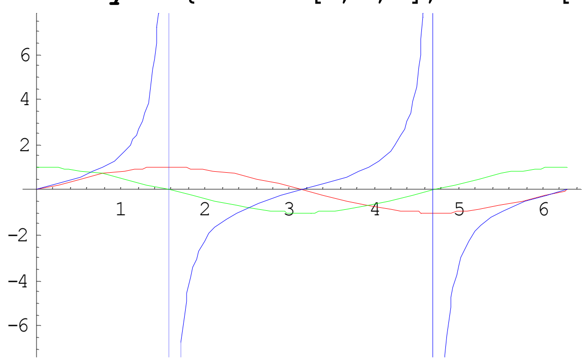
β) της εκθετικής/λογαριθμικής συνάρτησης στο διάστημα [0,5].

γ) του υπερβολικού ημιτόνου $\sinh(x)$ και συνημίτονου $\cosh(x)$ στο διάστημα [-3,3].

Απάντηση.

α)

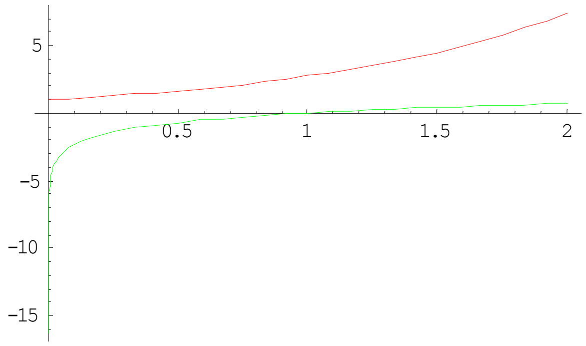
```
Plot[{Sin[x], Cos[x], Tan[x]}, {x, 0, 2 Pi},
 PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1]}]
```



Με κόκκινο χρώμα (RGBColor[1,0,0]) σχεδιάσθηκε η $\sin(x)$, με πράσινο χρώμα (RGBColor[0,1,0]) σχεδιάσθηκε η $\cos(x)$ και με μπλε χρώμα (RGBColor[0,0,1]) σχεδιάσθηκε η $\tan(x)$.

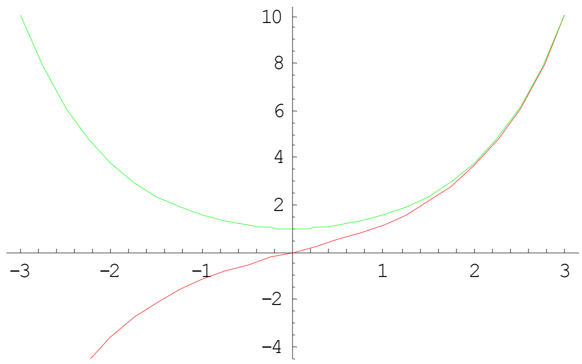
β)

```
Plot[{Exp[x], Log[x]}, {x, 0, 2}, PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0]}]
```



γ)

```
Plot[{Sinh[x], Cosh[x]}, {x, -3, 3}, PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0]}]
```


10
8
6
4
2
-2
-4
-3
-2
-1
1
2
3

5. Όρια πραγματικών συναρτήσεων στο Mathematica.

Για να υπολογίσουμε όρια στο Mathematica κάνουμε χρήση της συνάρτησης Limit[] της οποίας η σύνταξη περιγράφεται στον παρακάτω πίνακα.

Μαθηματική Έκφραση	Υλοποίηση στο Mathematica
$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$	**Limit[f,x->0]**
$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	**Limit[f,x->a]**
$\lim\limits_{x\to a-} f(x)$	**Limit[f,x->a,Direction->1]**
$\lim\limits_{x\to a+} f(x)$	**Limit[f,x->a,Direction->-1]**

Στον παραπάνω πίνακα το x είναι η μεταβλητή. Η f είναι η συνάρτηση, ως προς x. Η συνάρτηση μπορεί να γραφεί απευθείας μέσα στη Limit ή να έχει ορισθεί από πριν. Για όρια στο άπειρο το a αντικαθιστάται με το Infinity.

Παράδειγμα 1. Υπολογίστε τα ακόλουθα όρια.

α) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}$

β) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-2x+8}$

Απάντηση.

α)

$$\texttt{Limit}\left[\frac{\texttt{Sin[x]}}{\texttt{x}}, \texttt{x}\to 0\right]$$

1

$$\texttt{Limit}\left[\frac{x^3-3x+2}{x^2-2x+8}, x\to -2\right]$$

0

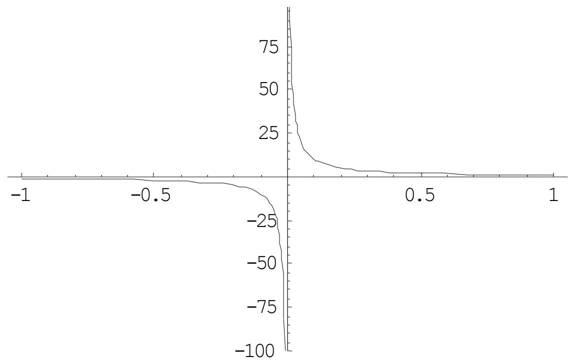
Παράδειγμα 2. Να μελετήστε τη συμπεριφορά της

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

στο x=0-, x=0+ και $\pm\infty$.

Απάντηση. Η γραφική παράσταση της f(x) δίνεται παρακάτω :

$$\texttt{Plot}\left[\frac{1}{x}, \{x, -1, 1\}\right]$$




```
Limit[1/x, x → 0, Direction → 1]
```

$-\infty$

και συνεπώς $\lim_{x\to 0-}\dfrac{1}{x}=-\infty$.

```
Limit[1/x, x → 0, Direction → -1]
```

∞

και συνεπώς $\lim_{x\to 0+}\dfrac{1}{x}=+\infty$.

```
Limit[1/x, x → +Infinity]
```

0

```
Limit[1/x, x → -Infinity]
```

0

και συνεπώς $\lim_{x\to \pm\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

Παράδειγμα 3. Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, όπου

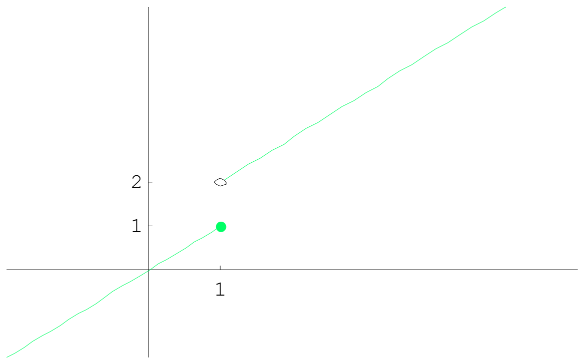
$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases} x,\ \acute{o}\tau\alpha\nu\ x\le 1\\ x+1,\ \acute{o}\tau\alpha\nu\ x>1\end{cases}$$

Η γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης δίνεται παρακάτω :

```
p1 = Plot[x, {x, -2, 1}, PlotStyle → {Hue[0.4]}, PlotRange → {{-2, 6}, {-2, 6}},
   Prolog → {Circle[{1, 2}, 0.085]}, Epilog → {PointSize[0.02], Hue[0.4], Point[{1, 1}]},
   Ticks → {{1}, {1, 2}}, DisplayFunction → Identity];

p2 = Plot[x + 1, {x, 1.05, 5}, PlotStyle → {Hue[0.4]}, PlotRange → {{-2, 6}, {-2, 6}},
   Ticks → {{1}, {1, 2}}, DisplayFunction → Identity];

Show[p1, p2, DisplayFunction → $DisplayFunction];
```



Ορίζουμε την συνάρτηση

```
f[x_] := If[x ≤ 1, x, x + 1]
```

και παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x+1) = 2$$

```
Limit[f[x], x → 1, Direction → -1]
```

2

και

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x) = 1,$$

```
Limit[f[x], x → 1, Direction → 1]
```

1

δηλαδή ότι υπάρχουν (στο $\mathbb{R}$) τα όρια $\lim_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ και ότι $\lim_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim_{x\to 1^-} f(x)$. Επομένως, το $\xi = 1$ είναι σημείο ασυνέχειας πρώτου είδους της f.

6. Παράγωγοι στο Mathematica.

Παράδειγμα 1. Υπολογίστε την παράγωγο της $f(x)=\cos(x)$ με τον ορισμό της παραγώγου.

Απάντηση. Ο υπολογισμός της παραγώγου της $\cos(x)$ με τη χρήση του ορισμού μπορεί να γίνει με τις ακόλουθες εντολές.

```
Limit[(f[x+h] - f[x])/h, h → 0]
```
$-\sin(x)$

Η εντολή με τη χρήση της οποίας υπολογίζουμε παραγώγους είναι η **D[]**. Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζεται η σύνταξή της.

Μαθηματική Έκφραση	**Υλοποίηση στο Mathematica**
$\dfrac{df(x)}{dx}$	**D[f(x),x] ή** ∂_x `f[x]`
$\dfrac{d^k f(x)}{dx^k}$	**D[f(x),{x,k}]**

Στον παραπάνω πίνακα το x είναι η μεταβλητή. Η f είναι η συνάρτηση, ως προς x. Η συνάρτηση μπορεί να γραφεί απευθείας μέσα στη D[] ή να έχει ορισθεί από πριν.

Παράδειγμα 2. Να υπολογίσετε την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης

$$f(x)=\cos(x^2+1)$$

Απάντηση.
Ορισμός της συνάρτησης
```
f[x_] := Cos[x^2 + 1]
```

Πρώτη παράγωγος
```
D[f[x], x]
```
$-2x\sin(x^2+1)$
ή
∂_x `f[x]`
$-2x\sin(x^2+1)$

Δεύτερη παράγωγος
```
D[f[x], {x, 2}]
```
$-4\cos(x^2+1)\,x^2-2\sin(x^2+1)$
ή
$\partial_{x,x}$ `f[x]`
$-4\cos(x^2+1)\,x^2-2\sin(x^2+1)$

Παράδειγμα 3. Να διατυπώσετε τους κανόνες παραγώγισης συναρτήσεων (αθροίσματος, γινομένου, πηλίκου, σύνθεσης).
Απάντηση. Πρώτα διαγράφουμε προηγούμενους ορισμούς των συναρτήσεων f,g

```
Clear[f, g]
```

Παράγωγος αθροίσματος

```
D[f[x] + g[x], x]
```

$f'(x) + g'(x)$

Παράγωγος γινομένου

```
D[f[x] * g[x], x]
```

$g(x)\, f'(x) + f(x)\, g'(x)$

Παράγωγος πηλίκου

```
D[f[x] / g[x], x]
```

$\frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)\, g'(x)}{g(x)^2}$

Παράγωγος σύνθεσης συναρτήσεων

```
D[f[g[x]], x]
```

$f'(g(x))\, g'(x)$

7. Βασικά θεωρήματα του διαφορικού λογισμού.

Παράδειγμα 1. Να εφαρμόσετε το θεώρημα της μέσης τιμής για το πολυώνυμο $f(x)=x^3-3x^2+3x+1$ στο διάστημα [0,2].

Απάντηση.

Η $f(x)=x^3-3x^2+3x+1$ είναι συνεχής στο [0,2], παραγωγίσιμη στο (0,2) και συνεπώς υπάρχει ξ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}$. Παρακάτω υπολογίζουμε την τιμή του ξ.

```
f[x_] := x^3 - 3x^2 + 3x + 1
Solve[f'[a] == (f[2] - f[0])/(2 - 0), a]
```

$$\left\{\left\{a\to\frac{1}{3}(3-\sqrt{3})\right\},\left\{a\to\frac{1}{3}(3+\sqrt{3})\right\}\right\}$$

Άρα υπάρχουν δύο τέτοια σημεία $\xi_0=\frac{1}{3}\left(3-\sqrt{3}\right), \xi_1=\frac{1}{3}\left(3+\sqrt{3}\right)$. Σχηματίζουμε τις ευθείες που περνούν από τα σημεία ξ_0,ξ_1.

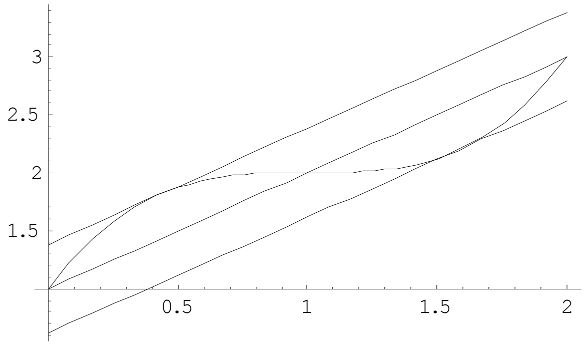
```
y1[x_] := f[1/3 (3-√3)] + f'[1/3 (3-√3)] * (x- 1/3 (3-√3))
y2[x_] := f[1/3 (3+√3)] + f'[1/3 (3+√3)] * (x- 1/3 (3+√3))
```

καθώς και την ευθεία που ενώνει τα σημεία $\{(0,f(0)),(2,f(2))\}$

```
y[x_] := f[0] + (f[2] - f[0]) / (2 - 0) * (x - 0)
```

και στη συνέχεια κάνω την γραφική παράσταση των συναρτήσεων $f(x), y1(x), y2(x), y(x)$

```
Plot[{f[x], y[x], y1[x], y2[x]}, {x, 0, 2}]
```



Συνεπώς συμπεραίνουμε από το θεώρημα της μέσης τιμής ότι υπάρχουν σημεία πάνω στην καμπύλη μου στο διάστημα [0,2], στα οποία η εφαπτομένη είναι παράλληλη με την ευθεία που ενώνει τα σημεία $\{(0,f(0)),(2,f(2))\}$.

Παράδειγμα 2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$. Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης, τα σημεία καμπής, τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι αύξουσα-φθίνουσα, καθώς και τα σημεία στα οποία η συνάρτηση είναι κοίλη ή κυρτή.

Απάντηση. Ορίζουμε την συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

```
f[x_] := x^3 - 3x^2 + 3x + 1
```

και στη συνέχεια για να υπολογίσουμε τα πιθανά τοπικά ακρότατα υπολογίζουμε τις τιμές για τις οποίες μηδενίζεται η παράγωγος :

```
Solve[f'[x] == 0, x]
```

$\{\{x \to 1\}, \{x \to 1\}\}$

Συνεπώς πιθανό τοπικό ακρότατο έχουμε στο σημείο x=1. Η δεύτερη παράγωγος στο σημείο αυτό μας βοηθάει να υπολογίσουμε αν έχουμε τοπικό ελάχιστο ή τοπικό μέγιστο ή σημείο καμπής.

```
f''[1]
```

0

Επειδή $f''(0) = 0$ άρα έχουμε σημείο καμπής στο x=1. Στο συμπέρασμα αυτό θα καταλήγαμε αν ελέγχαμε τις περιοχές που η συνάρτηση είναι αύξουσα ($f'(x) \geq 0$) και φθίνουσα ($f'(x) \leq 0$).

```
<< Algebra`InequalitySolve`
```

(καλούμε την συνάρτηση InequalitySolve από το πακέτο Algebra)

```
InequalitySolve[f'[x] > 0, x]
```

$x < 1 \vee x > 1$

```
InequalitySolve[f'[x] < 0, x]
```

False

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι η συνάρτηση είναι αύξουσα για όλους τους πραγματικούς αριθμούς. Το σημείο καμπής θα μπορούσαμε να το υπολογίσουμε και ως το σημείο στο οποίο μηδενίζεται η δεύτερη παράγωγος

```
Solve[f''[x] == 0, x]
```

$\{\{x \to 1\}\}$

Η συνάρτηση f(x) έχει τα κοίλα άνω για τις τιμές των x για τις οποίες $f''(x) > 0$, ενώ έχει τα κοίλα κάτω για τις τιμές των x για τις οποίες $f''(x) < 0$.

```
InequalitySolve[f''[x] > 0, x]
```

$x > 1$

```
InequalitySolve[f''[x] < 0, x]
```

$x < 1$

Άρα έχει τα κοίλα άνω για x>1 και τα κοίλα κάτω για x<1. Η συνάρτηση f(x) έχει οριζόντια ασύμπτωτη την $y = a$ αν $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a$

```
Limit[f[x], x→ Infinity]
```

∞

Άρα δεν έχει η συνάρτηση μας οριζόντια ασύμπτωτη. Η συνάρτηση f(x) έχει κάθετη ασύμπτωτη την $x = x_0$ αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$

```
Limit[f[x], x→ x0]
```

$x0^3 - 3\,x0^2 + 3\,x0 + 1$

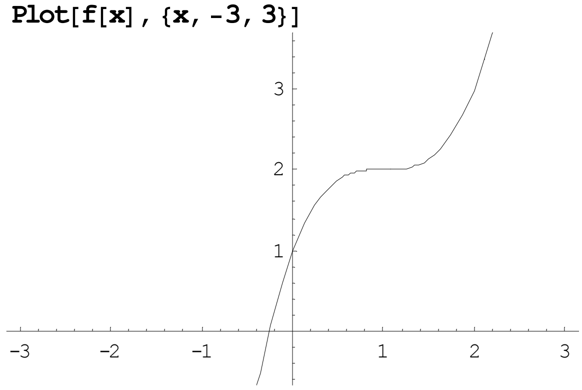
Άρα δεν έχει η συνάρτηση μας κατακόρυφη ασύμπτωτη. Η συνάρτηση f(x) έχει πλάγια ασύμπτωτη την $y = \lambda x + \beta$ αν $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lambda, \lim_{x \to \infty} \left[f(x) - \lambda x \right] = \beta$

```
Limit[f[x]/x, x→ Infinity]
```

∞

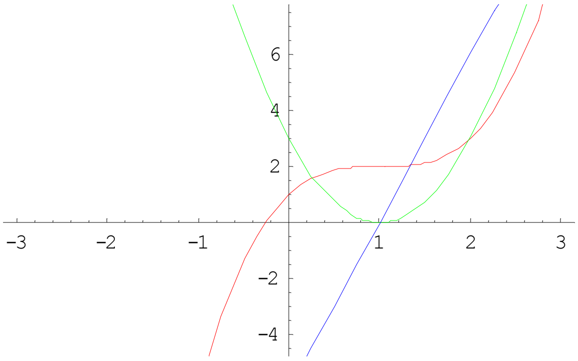
Άρα δεν έχει η συνάρτηση μας πλάγια ασύμπτωτη. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης δίνεται παρακάτω :

```
Plot[f[x], {x, -3, 3}]
```



Παρακάτω δίνουμε και την γραφική παράσταση των 3 συναρτήσεων $\{f(x), f'(x), f''(x)\}$ για να μπορέσετε να δείτε την μονοτονία της συνάρτησης και τα κοίλα της.

```
Plot[{f[x], f'[x], f''[x]}, {x, -3, 3},
 PlotStyle→ {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1]}]
```



Η πράσινη γραμμή που συμβολίζει την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης είναι μονίμως θετική και συνεπώς η συνάρτηση μας είναι αύξουσα, ενώ η μπλε γραμμή που συμβολίζει την δεύτερη παράγωγο είναι αρνητική για x<1 και θετική για x>1 και συνεπώς στα αντίστοιχα διαστήματα η συνάρτηση μας έχει τα κοίλα κάτω και άνω αντίστοιχα, ενώ στο σημείο x=1 βλέπουμε να αλλάζουν τα κοίλα και συνεπώς το x=1 είναι σημείο καμπής.

Προσπάθησε να μελετήσεις την γραφική παράσταση της $f(x)=\dfrac{4}{x-1}-\dfrac{1}{x-3}$ με την παραπάνω μεθοδολογία.

Παράδειγμα 2. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x+1$ έχει μια μόνο ρίζα στο διάστημα $[1,2]$.

Απάντηση. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^3-3x+1$.

```
f[x_] := x^3 - 3x + 1
```

Επειδή

```
f[1] f[2]
-3
```

και η f (ως πολυωνυμική) είναι συνεχής, από το θεώρημα Bolzano συνεπάγεται ότι στο [1, 2] υπάρχει τουλάχιστον ένα x_0 τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$. Επειδή

```
D[f[x], x]
-3 + 3 x^2
```

και

```
<< Algebra`
InequalitySolve[D[f[x], x] > 0, x]
x < -1 || x > 1
```

η f(x) είναι γνησίως αύξουσα στο (1,2) οπότε η ρίζα είναι μοναδική.
Για να υπολογίσουμε την ρίζα της παραπάνω πολυωνυμικής εξίσωσης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την προσεγγιστική μέθοδο Newton-Raphson

$$x_{k+1}=\underbrace{x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}_{g(x_k)}$$

η οποία μπορεί να υλοποιηθεί στο Mathematica ως εξής : α) ορίζουμε την συνάρτηση g(x) ως εξής :

$$g[x\_] := x - \frac{x^3 - 3x + 1}{3x^2 - 3}$$

και β) εφαρμόζουμε την συνάρτηση FixedPointList[g,x0] η οποία υπολογίζει την λίστα τιμών {g[x0],g[g[x0]], ….} ή διαφορετικά τα σημεία {x1,x2,x3,…} έως ότου η απόλυτη τιμή της διαφοράς $\left|x_{k+1} - x_k\right| < \varepsilon$ οπότε και σταματάει η επαναληπτική αυτή διαδικασία.

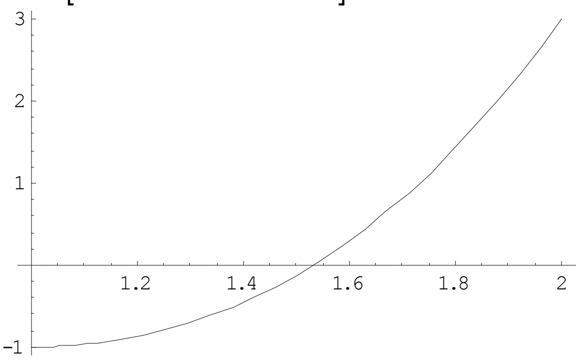
```
FixedPointList[g, 1.1]
{1.1, 2.6381, 1.99791, 1.66574, 1.54841, 1.53238, 1.53209, 1.53209, 1.53209, 1.53209}
```

Άρα η λύση που ψάχνουμε είναι x0=1.53209. Θα μπορούσαμε να βρούμε κατευθείαν την τιμή χρησιμοποιώντας την συνάρτηση FixedPoint[f,x0]

```
FixedPoint[g, 1.1]
1.53209
```

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x) στο [1,2] είναι η παρακάτω :

$$\text{Plot}\left[x^3 - 3x + 1, \{x, 1, 2\}\right]$$



Η παραπάνω μέθοδος συγκλίνει για εκείνες τις τιμές του x για τις οποίες $\left|g'(x)\right| < 1$ δηλ.

```
InequalitySolve[Abs[D[g[x], x]] < 1, x] // N
x < -1.55198 || -0.438544 < x < 0.665138 || x > 1.32538
```

■

8. Το ορισμένο ολοκλήρωμα στο Mathematica.

Παρακάτω παρουσιάζεται μια εφαρμογή υπολογισμού ορισμένου ολοκληρώματος στο Mathematica με την βοήθεια : α) των αθροισμάτων Riemmann, β) του κανόνα του τραπεζίου, και γ) της συνάρτησης Integrate[], της οποίας η σύνταξη δίνεται παρακάτω.

Integrate[f(x), {x, a, b}]	Υπολογίζει το ορισμένο ολοκλήρωμα της f(x) που εξαρτάται από τη μεταβλητή x στο κλειστό διάστημα [a,b].

Παράδειγμα 1. Να υπολογισθεί το ορισμένο ολοκλήρωμα :

$$\int_1^2 x^3 dx$$

Απάντηση. Θα προσπαθήσουμε αρχικά να λύσουμε το πρόβλημα με τα αθροίσματα Riemann και στη συνέχεια πολύ πιο απλά με την συνάρτηση Integrate[]. Αρχικά ορίζουμε την συνάρτηση της οποίας θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα :

```
f[x_] := x^3;
```

Στη συνέχεια δημιουργούμε μια συνάρτηση που υπολογίζει το αριστερό άθροισμα Riemann :

```
LeftRiemannSum[a0_, b0_, n0_] :=
  Module[{a = a0, b = b0, ΔX, k, n = n0, X},
   ΔX = (b - a)/n;
   X_k_ = a + k ΔX;
   Return[Sum[f[X_(k-1)] ΔX, {k, 1, n}]; ];
```

Η συνάρτηση LeftRiemmanSum[] εξαρτάται από την αρχική και τελική τιμή a0 και b0 αντίστοιχα του κλειστού διαστήματος στο οποίο υπολογίζουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα αλλά και το πλήθος n0 των υποδιαστημάτων στα οποία χωρίζεται το κλειστό διάστημα [a0,b0]. Στην δεύτερη γραμμή ορίσαμε τις τοπικές μεταβλητές που θα χρησιμοποιήσουμε και δώσαμε αρχικές τιμές στα a,b. Στην Τρίτη γραμμή υπολογίσαμε το μήκος του διαστήματος Δx, ενώ στη συνέχεια ορίσαμε την τιμή από το άκρο κάθε διαστήματος. Στην τελευταία γραμμή επιστρέψαμε από τη συνάρτηση το άθροισμα Riemmann. Ας δούμε όμως ποια θα είναι το άθροισμα Riemmann αν χωρίσουμε το διάστημα [1,2] σε k ίσα υποδιαστήματα :

```
LeftRiemannSum[1, 2, k]
```

$$\frac{(-1+3k)\ (-3+5k)}{4k^2}$$

το οποίο καθώς το k τείνει στο άπειρο, δηλαδή τα υποδιαστήματα τείνουν να γίνουν άπειρα, θα γίνει ίσο με :

```
Limit[%, k → Infinity]
```

$$\frac{15}{4}$$

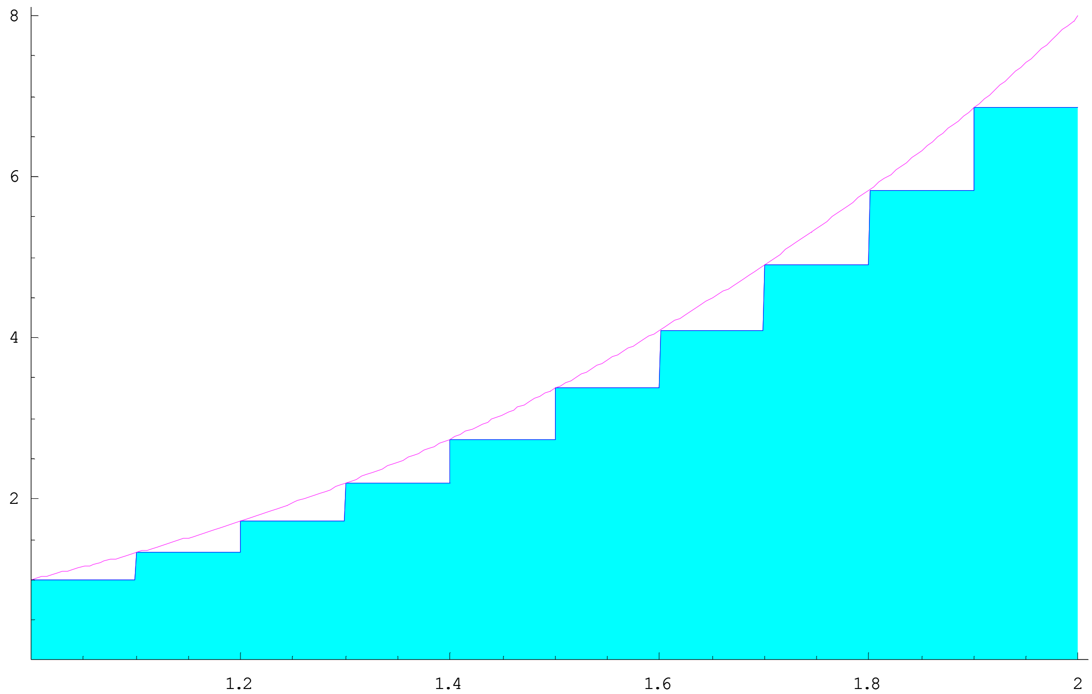
Στην παραπάνω τιμή θα καταλήγαμε και αν πέρναμε την συνάρτηση Integrate[] :

```
Integrate[f[x], {x, 1, 2}]
```

$$\frac{15}{4}$$

Παρακάτω δίνουμε ένα διάγραμμα του σχήματος που δημιουργείται αν χωρίσουμε το διάστημα [1,2] σε 10 ίσα υποδιαστήματα και πάρουμε τα ορθογώνια που χρησιμοποιούμε για το αριστερό άθροισμα Riemmann.

```
f[x_] := x^3;
a = 1;
b = 2;
n = 10;
LeftSum = LeftRiemannSum[a, b, n];
<< Graphics`FilledPlot`;
<< Graphics`Colors`;
gr1 = Plot[f[x], {x, 1, 2}, PlotPoints → 201, PlotStyle → Magenta, DisplayFunction → Identity];
gr2 = FilledPlot[f[1 + Floor[n (x - 1)]/n], {x, 1, 2}, PlotRange → {{1, 2.01}, {0, 8.120601}},
   PlotStyle → Blue, Fills → Cyan, DisplayFunction -> Identity];
Show[{gr2, gr1}, DisplayFunction → $DisplayFunction, ImageSize → {640, Automatic}];
Print["f[x]=", f[x], " over [", a, ",", b, "] using ", n, " subintervals."];
Print["The left Rieman sum is :"];
Print["Σ_{"k=1"}^n", "f[x_{k-1}] Δx=", LeftSum, "=", N[LeftSum]];
```



f[x]=x^3 over [1,2] using 10 subintervals.
The left Riemman sum is :

$$\sum_{k=1}^{10} f[x_{k-1}]\Delta x = \frac{1363}{400} = 3.4075$$

Όμοια μπορούμε να δουλέψουμε με τα δεξιά αθροίσματα :

```
RightRiemannSum[a0_, b0_, n0_] :=
  Module[{a = a0, b = b0, ΔX, k, n = n0, X},
   ΔX = (b - a)/n;
   X_k_ = a + k ΔX;
   Return[ Sum[f[X_k] ΔX, {k, 1, n}] ]; ];
```

Το δεξί άθροισμα Riemmann αν χωρίσουμε το διάστημα [1,2] σε k ίσα υποδιαστήματα θα γίνει :

```
RightRiemannSum[1, 2, k]
```

$$\frac{(1+3k)\ (3+5k)}{4 k^2}$$

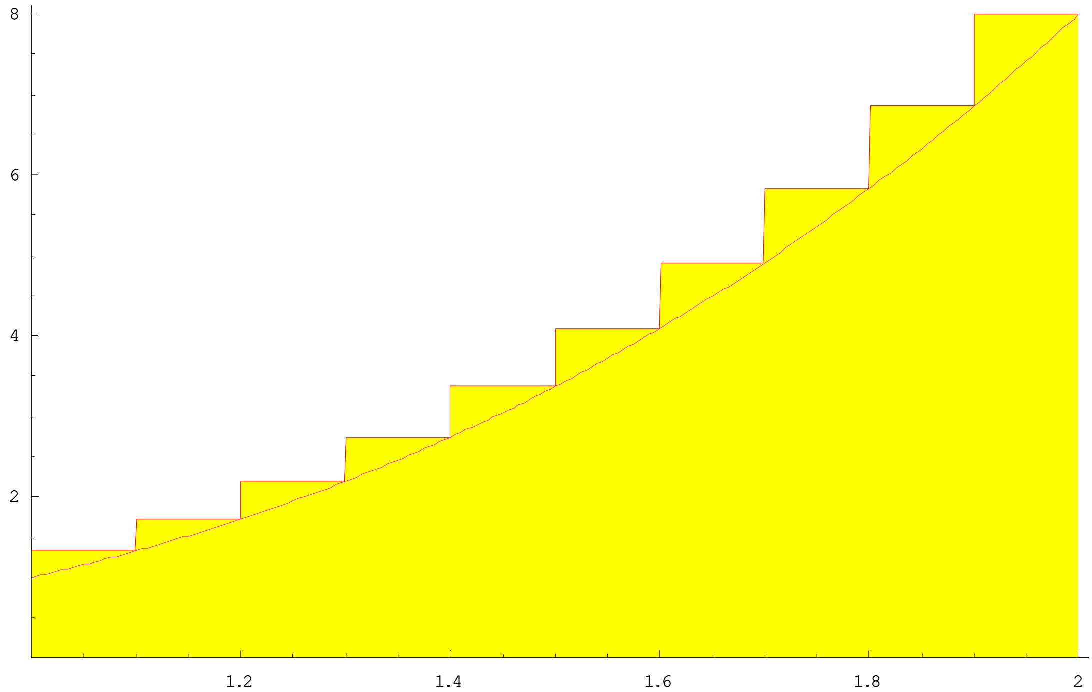
το οποίο καθώς το k τείνει στο άπειρο, δηλαδή τα υποδιαστήματα τείνουν να γίνουν άπειρα, θα γίνει ίσο με :

```
Limit[%, k→ Infinity]
```

$$\frac{15}{4}$$

Παρακάτω δίνουμε ένα διάγραμμα του σχήματος που δημιουργείται αν χωρίσουμε το διάστημα [1,2] σε 10 ίσα υποδιαστήματα και πάρουμε τα ορθογώνια που χρησιμοποιούμε για το δεξιά άθροισμα Riemmann.

```
f[x_] := x^3;
a = 1;
b = 2;
n = 10;
RightSum = RightRiemannSum[a, b, n];
<< Graphics`FilledPlot`;
<< Graphics`Colors`;
gr1 = Plot[f[x], {x, 1, 2}, PlotPoints → 201, PlotStyle → Magenta, DisplayFunction → Identity];
gr3 = FilledPlot[f[1 + Ceiling[n (x - 1)]/n], {x, 1, 2}, PlotRange → {{1, 2.01}, {0, 8.120601}}, PlotStyle → Red,
   Fills → Yellow, DisplayFunction -> Identity];
Show[{gr3, gr1}, DisplayFunction → $DisplayFunction, ImageSize → {640, Automatic}];
Print["f[x]=", f[x], " over [", a, ",", b, "] using ", n, " subintervals."];
Print["The right Riemman sum is :"];
Print["Σ_{"k=1"}^n", "f[x_{k-1}] Δx=", RightSum, "=", N[RightSum]];
```



f[x]=x^3 over [1,2] using 10 subintervals.

The right Riemman sum is :

$$\sum_{k=1}^{10} f[x_{k-1}]\Delta x=\frac{1643}{400}=4.1075$$

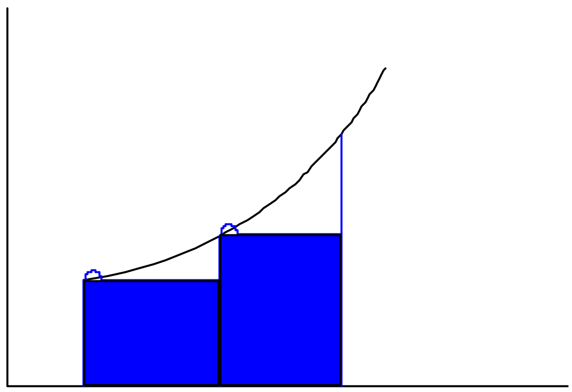
Παρακάτω δίνουμε έναν πίνακα με τις τιμές του δεξιά και αριστερά αθροίσματος Riemmann της παραπάνω συνάρτησης :

```
Table[{k, N[LeftRiemannSum[1, 2, k]], N[RightRiemannSum[1, 2, k]]}, {k, 2, 10}] // TableForm
```

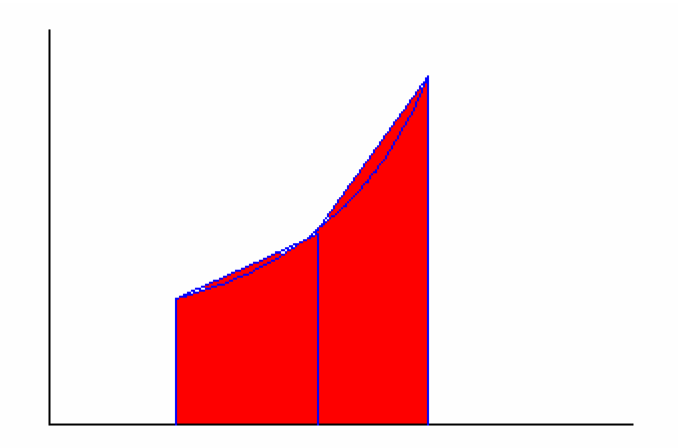
2	2.1875	5.6875
3	2.66667	5.
4	2.92188	4.67188
5	3.08	4.48
6	3.1875	4.35417
7	3.26531	4.26531
8	3.32422	4.19922
9	3.37037	4.14815
10	3.4075	4.1075

όπου εύκολα φαίνεται ότι όσο πιο πολλά διαστήματα τόσο πιο πολύ περιορίζεται το κλειστό διάστημα μεταξύ του δεξιού αθροίσματος και του αριστερού αθροίσματος Riemmann, το οποίο τελικά συγκλίνει στην τιμή 15/4=3.75.

Ένας άλλος τρόπος εύρεσης του ορισμένου ολοκληρώματος είναι να χρησιμοποιήσουμε αντί για ορθογώνια, τραπέζια. Να προσεγγίσω δηλαδή την επιφάνεια κάτω από την καμπύλη $f\left(x\right)=x^3$ όχι με ορθογώνια όπως παρακάτω :



αλλά με τραπέζια όπως στο παρακάτω σχήμα :



Στη συνέχεια δημιουργούμε μια συνάρτηση που υπολογίζει το άθροισμα των k τραπεζίων στο κλειστό διάστημα [a0,b0] :

```
TrapRule[a0_, b0_, m0_] :=
  Module[{a = N[a0], b = N[b0], k, m = m0, X},
   h = (b - a)/m;
   X[k_] = a + k h;
   Return[h/2 (f[a] + f[b]) + h Sum[f[X[k]], {k, 1, m-1}]; ];
```

Το άθροισμα των k τραπεζίων αν χωρίσουμε το διάστημα [1,2] σε k ίσα υποδιαστήματα θα είναι :

```
TrapRule[1, 2, k] // Simplify
```

$3.75 + \frac{0.75}{k^2}$

το οποίο καθώς το k τείνει στο άπειρο, δηλαδή τα υποδιαστήματα τείνουν να γίνουν άπειρα, θα γίνει ίσο με :

```
Limit[%, k → Infinity]
```

3.75

Παρακάτω δίνουμε ένα διάγραμμα του σχήματος που δημιουργείται αν χωρίσουμε το διάστημα [1,2] σε 10 ίσα υποδιαστήματα και πάρουμε τα τραπέζια που χρησιμοποιούμε για το παραπάνω άθροισμα.

```
TrapezoidalSum = TrapRule[a, b, n];
X[k_] = a + k (b - a)/n;
pts = Table[{X[k], f[X[k]]}, {k, 0, n}];
dots = ListPlot[pts, PlotStyle → {Red, PointSize[0.008]}, DisplayFunction → Identity];
<< Graphics`FilledPlot`;
<< Graphics`Colors`;
gr1 = Plot[f[x], {x, 1, 2}, PlotPoints → 201, PlotStyle → Blue, DisplayFunction → Identity];
gr5 = FilledListPlot[pts, PlotRange → {{1, 2.01}, {0, 8.120601}}, PlotStyle → {Red},
   Fills → Pink, DisplayFunction -> Identity];
Show[{gr5, gr1, dots}, DisplayFunction → $DisplayFunction, ImageSize → {640, Automatic}];
Print["f[x]=", f[x], " over [", a, ",", b, "] using ", n, " subintervals."];
Print["The trapezoidal sum is :"];
Print["Σ_{"k=1"}^{n}", "f[x_{k-1}] Δx=", TrapezoidalSum, "=", N[TrapezoidalSum]];
```

Παρακάτω δίνουμε έναν πίνακα με τις τιμές των αθροισμάτων των εμβαδών των τραπεζίων αν χωρίσουμε το διάστημα [1,2] σε 2,3,...,10 διαστήματα.

```
Table[{k, TrapRule[1, 2, k]}, {k, 2, 10}] // TableForm
```

2	3.9375
3	3.83333
4	3.79688
5	3.78
6	3.77083
7	3.76531
8	3.76172
9	3.75926
10	3.7575

Παρατηρήστε ότι η μέθοδος των τραπεζίων συγκλίνει πιο γρήγορα στο ορισμένο ολοκλήρωμα που ψάχνουμε.
Προσπαθήστε να χρησιμοποιήσετε το Mathematica για να εφαρμόσετε τον κανόνα του Simpson με τρόπο παρόμοιο με αυτόν που χρησιμοποιήσαμε στις παραπάνω παραγράφους. Τα παραπάνω προγράμματα (με ελαφρές τροποποιήσεις) αλλά και πολλά ακόμα που αφορούν προσεγγιστικές μεθόδους μπορείτε να βρείτε στη διεύθυνση http://math.fullerton.edu/mathews/.

Παράδειγμα 2. Να υπολογισθούν τα ορισμένα ολοκλήρωματα

$$\int_0^1 \sin(\sin(x))dx \qquad \int_0^\infty e^{ax}dx$$

Απάντηση. Κάνοντας χρήση της συνάρτησης Integrate[] έχουμε

```
Integrate[Sin[Sin[x]], {x, 0, 1}]
```

$$\int_0^1 \mathrm{Sin}[\mathrm{Sin}[x]]\, dx$$

Ο λόγος για το παραπάνω αποτέλεσμα είναι διότι δεν υπάρχει αναλυτική μορφή του αόριστου ολοκληρώματος $\int \sin(\sin(x))dx$. Για την προσεγγιστική τιμή του παραπάνω ορισμένου ολοκληρώματος κάνουμε χρήση της NIntegrate[] η οποία έχει όμοια σύνταξη με την Integrate[].

```
NIntegrate[Sin[Sin[x]], {x, 0, 1}]
0.430606
```

Για τον υπολογισμό του δεύτερου ολοκληρώματος έχουμε

```
Integrate[Exp[a x], {x, 0, Infinity}]
```

$$\mathrm{If}\left[\mathrm{Re}[a] < 0,\ -\frac{1}{a},\ \mathrm{Integrate}[e^{a x},\ \{x, 0, \infty\},\ \mathrm{Assumptions} \to \mathrm{Re}[a] \geq 0]\right]$$

Συνεπώς για αρνητικές τιμές του a το αποτέλεσμα είναι -1/a, ενώ για θετικές ή μηδενικές τιμές του a το ολοκλήρωμα δεν υπάρχει πρδ.

```
Integrate[Exp[-2 x], {x, 0, Infinity}]
```

$$\frac{1}{2}$$

```
Integrate[Exp[2 x], {x, 0, Infinity}]
```

Integrate::idiv : Integral of e^{2x} does not converge on $\{0, \infty\}$. More…

$$\int_0^\infty e^{2x}\, dx$$

Μπορούμε λοιπόν να θέτουμε συνθήκες για άγνωστες παραμέτρους που υπεισέρχονται στα ολοκληρώματα κάνοντας χρήση της επιλογής Assumptions π.χ.

```
Integrate[Exp[a x], {x, 0, ∞}, Assumptions → a < 0]
```

$-\frac{1}{a}$

■

9. Υπολογισμός αορίστων ολοκληρωμάτων στο Mathematica.

Παράδειγμα 1. Να υπολογισθούν τα παρακάτω αόριστα ολοκληρώματα :

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx \qquad \int x\log(x)\,dx$$

$$\int \left(x^2+3x+1\right)\cos(x)\,dx \qquad \int \frac{1}{\sqrt{ax+b}}\,dx$$

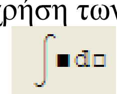
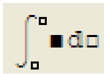
Απάντηση.

Integrate[Sqrt[x^2 + a^2], x]

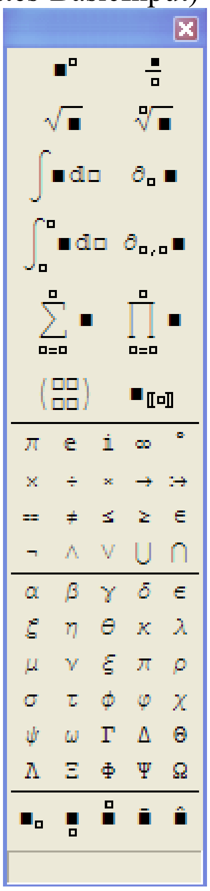
$$\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2}+\text{ArcSinh}[x]\right)$$

Μπορούμε επίσης να γράψουμε $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$ αντί **Integrate[Sqrt[x^2 + a^2], x]**. Σχηματίζουμε πρώτα το σύμβολο $\int$ γράφοντας ⁝int⁝ ([Esc]int[Esc]). Το d στο ολοκληρωμα δεν είναι το ίδιο με το d το Αγγλικό αλλά σχηματίζεται γράφοντας ⁝dd⁝ ([Esc]dd[Esc]). Επίσης η ρίζα γράφεται ως [Ctrl]+2.

Μπορούμε επίσης να κάνουμε χρήση των εργαλείων

 και 

της παλέτας Basic Input (File-Palettes-BasicInput)



$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$

$$\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2}+\text{ArcSinh}[x]\right)$$

Στο δεύτερο παράδειγμα θα έχουμε

```
Integrate[x Log[x], x]
```

$$\frac{1}{4} x^2 (-1 + 2 \text{Log}[x])$$

ή

$$\int x \,\text{Log}[x] \, dx$$

$$\frac{1}{4} x^2 (-1 + 2 \text{Log}[x])$$

Στο τρίτο παράδειγμα θα έχουμε

```
Integrate[(x^2 + 3 x + 1) Cos[x], x] // Simplify
```

$$(3 + 2 x) \text{Cos}[x] + (-1 + 3 x + x^2) \text{Sin}[x]$$

ή

$$\int (x^2 + 3 x + 1) \text{Cos}[x] \, dx \text{ // Simplify}$$

$$(3 + 2 x) \text{Cos}[x] + (-1 + 3 x + x^2) \text{Sin}[x]$$

Στο τελευταίο παράδειγμα θα έχουμε

```
Integrate[1 / Sqrt[a x + b], x]
```

$$2 \sqrt{2 + x}$$

ή

$$\int \frac{1}{\sqrt{a x + b}} \, dx$$

$$2 \sqrt{2 + x}$$

Για να δημιουργήσουμε το κλάσμα πατούμε τα πλήκτρα [Ctrl]+/. ■

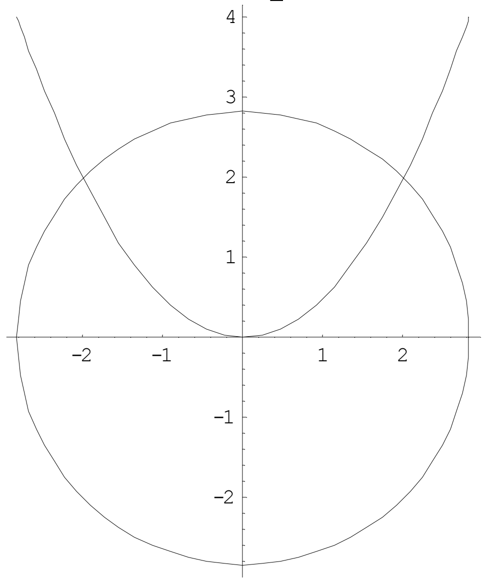
10. Εφαρμογές των ολοκληρωμάτων στο Mathematica.

Παρακάτω δίνουμε μερικές από τις εφαρμογές των ολοκληρωμάτων στο περιβάλλον του Mathematica.

Παράδειγμα 1. Η παραβολή $y = \frac{x^2}{2}$ διαιρεί τον κύκλο $x^2 + y^2 = 8$ σε δύο μέρη. Να βρεθεί το εμβαδόν καθενός από τα δύο αυτά μέρη.

Απάντηση. Αρχικά μπορούμε να σχεδιάσουμε και τα δύο γραφήματα με την συνάρτηση ImplicitPlot[],

```
<< Graphics`
ImplicitPlot[{y == x^2/2, x^2 + y^2 == 8}, {x, -√8, √8}]
```

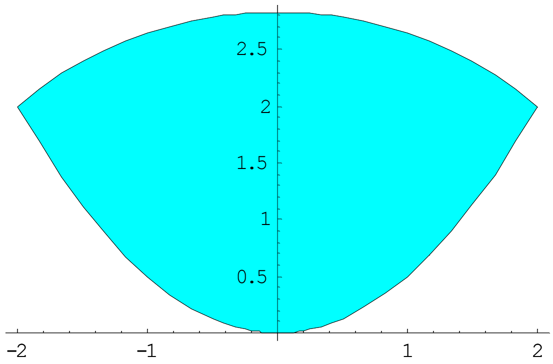


Τα σημεία τομής των δύο γραφημάτων είναι :

```
Solve[{y == x^2/2, x^2 + y^2 == 8}, {x, y}]
{{y → -4, x → -2 ⅈ √2}, {y → -4, x → 2 ⅈ √2}, {y → 2, x → -2}, {y → 2, x → 2}}
```

Μας ενδιαφέρουν λοιπόν δύο περιοχές : αυτή μεταξύ της καμπύλης $y = \sqrt{8 - x^2}$ και της $y = \frac{x^2}{2}$ στο διάστημα [0,2], και την συμμετρική της στο διάστημα [-2,0]. Το άθροισμα των δύο αυτών περιοχών μας δίνει την πρώτη περιοχή που ζητάει η άσκηση.

```
FilledPlot[{√(8 - x^2), x^2/2}, {x, -2, 2}]
```



Παραπάνω χρησιμοποιήσαμε την συνάρτηση FilledPlot[] η οποία ανήκει στο πακέτο <<Graphics` και έχει ως σκοπό την σκιαγράφηση του χώρου μεταξύ δύο καμπυλών. Αν μέσα στο όρισμα της FilledPlot[] είχαμε μια μόνο συνάρτηση θα γέμιζε με χρώμα ο χώρος μεταξύ της καμπύλης και του άξονα των x. Το εμβαδόν που θέλουμε να υπολογίσουμε θα είναι ίσο με :

```
Integrate[Sqrt[8 - x^2] - x^2 / 2, {x, -2, 2}]
```

$$\frac{4}{3} + 2\pi$$

ή

$$\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8 - x^2} - \frac{x^2}{2}\right) dx$$

$$\frac{4}{3} + 2\pi$$

Συνεπώς η υπόλοιπη περιοχή θα έχει εμβαδόν :

$$\pi * \left(\sqrt{8}\right)^2 - \left(\frac{4}{3} + 2\pi\right)$$

$$-\frac{4}{3} + 6\pi$$

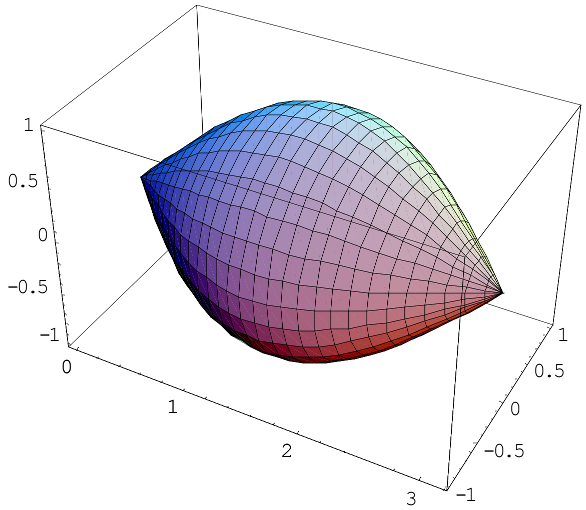
Το π γράφεται πατώντας [Esc]pi[ESC] δηλ. ⋮pi⋮. ■

Παράδειγμα 2. Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας που δημιουργείται από την περιστροφή του γραφήματος της $y(x) = \sin(x)$ με $x \in [0, \pi]$ γύρω από τον άξονα των x. Στη συνέχεια να υπολογισθεί ο όγκος του στερεού που δημιουργήθηκε.

Απάντηση. Την περιστροφή μιας συνάρτησης f(x) στο διάστημα [xmin,xmax] γύρω από τον άξονα που συνδέει το σημείο (0,0,0) με το σημείο (a,b,c) μπορούμε να την πετύχουμε με την εντολή

SurfaceOfRevolution[f,{x,xmin,xmax},RevolutionAxis->{a,b,c}]

```
SurfaceOfRevolution[Sin[x], {x, 0, π}, RevolutionAxis -> {1, 0, 0}, AspectRatio -> Automatic]
```



Το εμβαδόν της παραπάνω επιφάνειας δίνεται από τον τύπο $E = 2\pi \int_0^{\pi} f(z)\sqrt{1+f'(z)}dz$ και υπολογίζεται στο Mathematica ως εξής :

```
2 Pi Integrate[Sin[x] Sqrt[1 + D[Sin[x], x]], {x, 0, Pi}]
```

$\frac{8\sqrt{2}\,\pi}{3}$

ή

$2\pi \int_0^{\pi} \mathbf{Sin[x]} \sqrt{\mathbf{1} + \partial_{\mathbf{x}} \mathbf{Sin[x]}}\, d\mathbf{x}$

$\frac{8\sqrt{2}\,\pi}{3}$

Ο όγκος του παραπάνω στερεού δίνεται από τον τύπο $V = \int_0^{\pi} \pi f(z)^2\, dz$ και υπολογίζεται στο Mathematica ως εξής :

```
Integrate[Pi (Sin[x])^2, {x, 0, Pi}]
```

$\frac{\pi^2}{2}$

ή

$\int_0^{\pi} \pi\, (\mathbf{Sin[x]})^2\, d\mathbf{x}$

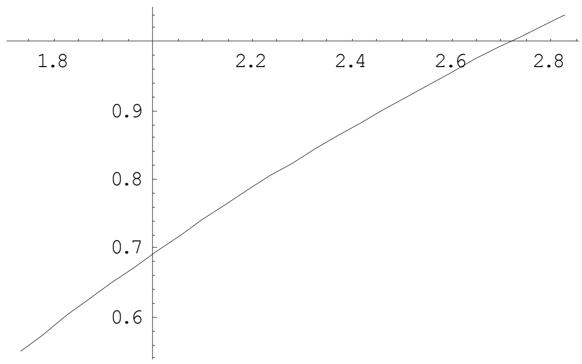
$\frac{\pi^2}{2}$

■

Παράδειγμα 3. Να υπολογισθεί το μήκος της καμπύλης $y(x) = \log(x)$ μεταξύ των σημείων $x_1 = \sqrt{3}$ και $x_2 = \sqrt{8}$.

Απάντηση. Παρακάτω δίνουμε το γράφημα της καμπύλης στο ζητούμενο διάστημα.

$\mathbf{Plot}[\mathbf{Log[x]}, \{\mathbf{x}, \sqrt{\mathbf{3}}, \sqrt{\mathbf{8}}\}]$



Το μήκος της καμπύλης δίνεται από τον τύπο $L = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1+\left(y'\left(x\right)\right)^2}\,dx$ και είναι το παρακάτω :

```
Integrate[Sqrt[1 + D[Log[x], x] ^2], {x, √3, √8}]
```

$\frac{1}{2}\left(2+\mathrm{Log}\left[\frac{3}{2}\right]\right)$

ή

$\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1+(\partial_x \mathrm{Log}[x])^2}\, dx$

$\frac{1}{2}\left(2+\mathrm{Log}\left[\frac{3}{2}\right]\right)$

■

Παράδειγμα 4. Να υπολογισθεί :

α) το κέντρο μάζας ενός ημικυκλικού δίσκου με κέντρο (0,0) και ακτίνα r.

β) το κέντρο μάζας ενός ημικύκλιου με κέντρο (0,0) και ακτίνα r.

Απάντηση. (α) Το κέντρο μάζας δίνεται από τις συντεταγμένες :

$$x = \frac{\int_a^b xf\left(x\right)dx}{\int_a^b f\left(x\right)dx}, y = \frac{\int_a^b \frac{1}{2}f\left(x\right)^2 dx}{\int_a^b f\left(x\right)dx}$$

και συνεπώς, εφόσον $y\left(x\right)=\sqrt{r^2-x^2}, x\in\left[-r,r\right]$, θα έχουμε

$$\frac{\int_{-r}^{r} x\sqrt{r^2-x^2}\, dx}{\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\, dx}$$

0

$$\frac{\int_{-r}^{r}\frac{1}{2}\left(r^2-x^2\right) dx}{\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\, dx}$$

$$\frac{4\sqrt{r^2}}{3\pi}$$

και συνεπώς οι ζητούμενες συντεταγμένες θα είναι $\left(0,\frac{4r}{3\pi}\right)$.

(β) Το κέντρο μάζας του ημικυκλίου δίνεται από τις συντεταγμένες :

$$y=\frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx},\quad x=\frac{\int_a^b x\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx}$$

και συνεπώς, εφόσον $y(x)=\sqrt{r^2-x^2}, x\in[-r,r]$, θα έχουμε

$$\frac{\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\,\sqrt{1+\left(\partial_x\sqrt{r^2-x^2}\right)^2}\,dx}{\int_{-r}^{r}\sqrt{1+\left(\partial_x\sqrt{r^2-x^2}\right)^2}\,dx}$$

$$\frac{2\,r\,\mathrm{Abs}[r]}{\mathrm{If}\left[r>0,\ \pi\,r,\ \mathrm{Integrate}\left[\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}},\ \{x,-r,r\},\ \mathrm{Assumptions}\to r\le 0\right]\right]}$$

$$\frac{\int_{-r}^{r}x\sqrt{1+\left(\partial_x\sqrt{r^2-x^2}\right)^2}\,dx}{\int_{-r}^{r}\sqrt{1+\left(\partial_x\sqrt{r^2-x^2}\right)^2}\,dx}$$

0

και συνεπώς οι ζητούμενες συντεταγμένες θα είναι $\left(0,\frac{2r}{\pi}\right)$.

■

Παράδειγμα 5. Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα :

$$(\alpha)\ \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}\quad (\beta)\ \int_1^2 \frac{dx}{(x-2)^2}\quad (\gamma)\ \int_0^2 \frac{dx}{(2x-1)^{2/3}}$$

Απάντηση.

(α)

```
Integrate[1/x^2, {x, 1, Infinity}]
```

1

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

1

(β)

$$\int_1^2 \frac{1}{(x-2)^2}\,dx$$

Integrate ::idiv : Integral of $\frac{1}{(-2+x)^2}$ does not converge on {1, 2}. More…

$$\int_1^2 \frac{1}{(-2+x)^2}\,dx$$

(γ)

$$\int_0^2 \frac{1}{(2x-1)^{\frac{2}{3}}}\,dx$$

$$-\frac{3}{2}\left((-1)^{1/3}-3^{1/3}\right)$$

■

Παράδειγμα 6. Δείξτε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ συγκλίνει αν p>1.

Απάντηση. Υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\, dx$$

```
If[Re[p] > 1, 1/(-1 + p), Integrate[x^-p, {x, 1, ∞}, Assumptions → Re[p] ≤ 1]]
```

συμπεραίνουμε ότι το παραπάνω ολοκλήρωμα υπάρχει αν και μόνο αν p>1. Επειδή η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^p}, p > 1$ είναι θετική και φθίνουσα στο $[1, \infty)$, θα έχουμε από το κριτήριο σύγκλισης στην σελ. 162 του Β' Τόμου, έχουμε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ συγκλίνει για p>1 και ακόμα :

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx + \frac{1}{1^p}$$

ή ισοδύναμα λόγω της παραπάνω απόκρισης του Mathematica

$$\frac{1}{p-1} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} < \frac{1}{p-1} + 1$$

Αναφέρουμε χαρακτηριστικά τις περιπτώσεις για p=2 :

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx$$

1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{\pi^2}{6}$$

```
N[%]
1.64493
```

και p=3 :

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3}\, dx$$

$$\frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

```
Zeta[3]
N[%]
1.20206
```

Προσπάθησε να δουλέψεις παρόμοια για το άθροισμα $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log(n))^p}$. ■

11. Σειρές Taylor – Δυναμοσειρές.

Παράδειγμα 1. Να υπολογίσετε τους 10 πρώτους όρους του αναπτύγματος Maclaurin της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$. Να υπολογίσετε το λάθος που θα προκύψει E_{10} παίρνοντας τους 10 πρώτους όρους του αναπτύγματος Maclaurin στο κλειστό διάστημα [-0.5,0.5] και να γίνει η γραφική παράσταση του λάθους.

Απάντηση. Για τον υπολογισμό των πρώτων n όρων ου αναπτύγματος Taylor μιας συνάρτησης f(x) στο x=x0, χρησιμοποιούμε την συνάρτηση Series[f(x),{x,x0,n}]. Συνεπώς για να απαντήσουμε στο πρώτο ερώτημα θα πάρουμε :

```
Series[1/(1-x), {x, 0, 10}]
```

$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10}+O[x]^{11}$

Αν πάλι θέλουμε να κόψουμε τον όρο με τα λάθη θα γράψουμε :

```
Normal[Series[1/(1-x), {x, 0, 10}]]
```

$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10}$

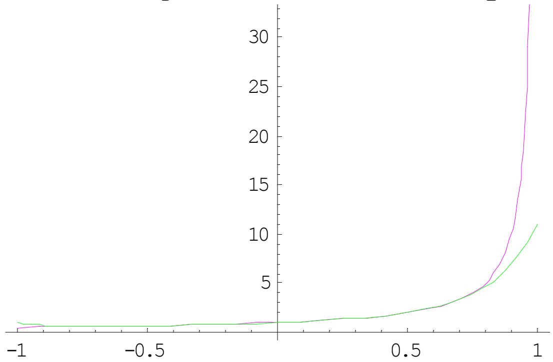
Η συνάρτηση SeriesCoefficient[series,n] μας βοηθάει να υπολογίσουμε τον n-οστό όρο της σειράς :

```
SeriesCoefficient[Series[1/(1-x), {x, 0, 10}], 1]
```

1

Παρακάτω δίνουμε μια γραφική παράσταση στο κλειστό διάστημα [-1,1] των συναρτήσεων $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ (σε Magenta χρώμα) και του προσεγγιστικού πολυώνυμου Maclaurin $g(x)=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+x^{10}$ (σε πράσινο χρώμα)

```
f[x_] := 1/(1-x);
g[x_] := 1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+x^9+x^10;
Plot[{f[x], g[x]}, {x, -1, 1}, PlotStyle → {Magenta, Green}];
```

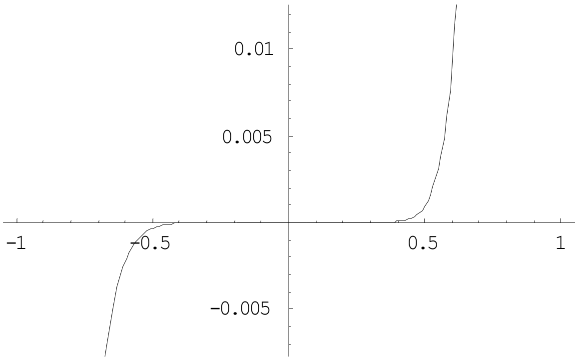


καθώς και του λάθους $f(x)-g(x)$ το οποίο είναι ίσο με

```
e[x_] := f[x] - g[x]
e[x] // Simplify
```

$$\frac{x^{11}}{1-x}$$

```
Plot[e[x], {x, -1, 1}];
```

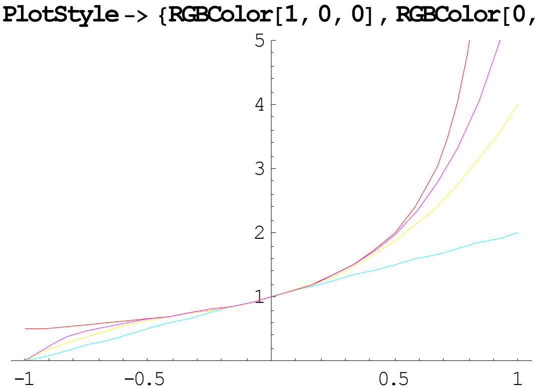


Το μέγιστο λάθος που έχουμε στο διάστημα [-1,1] είναι :

```
Maximize[e[x], -0.5 ≤ x ≤ 0.5, {x}]
{0.000976563, {x→ 0.5}}
```

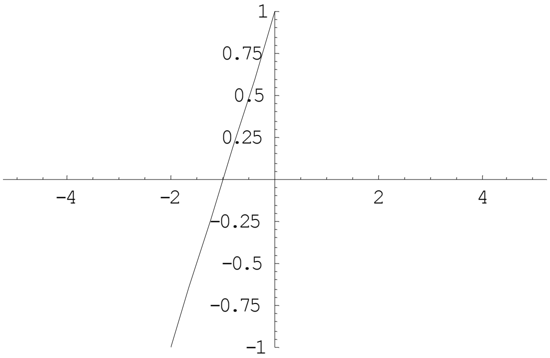
το οποίο ισχύει για x=0.5. Παρακάτω δίνουμε την προσέγγιση της f(x) με πολυώνυμα $1^{ου}$, $3^{ου}$, και $5^{ου}$ βαθμού για να δούμε πόσο καλά προσεγγίζουν την συνάρτηση μας.

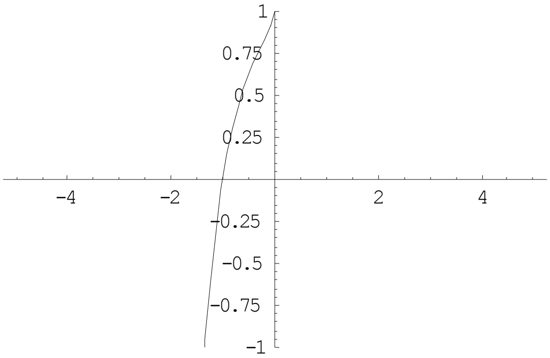
```
Plot[{1/(1 - x), 1 + x, 1 + x + x^2 + x^3, 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5}, {x, -1, 1}, PlotRange → {0, 5},
 PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 1], RGBColor[1, 1, 0], RGBColor[1, 0, 1]}]
```



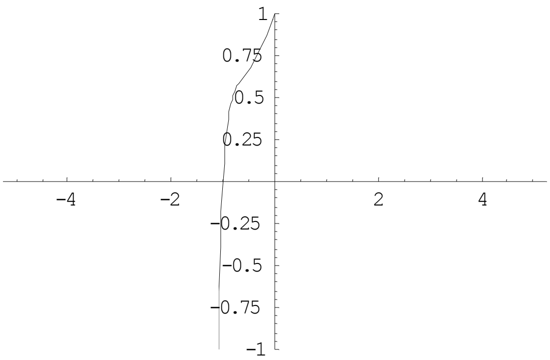
Θα μπορούσαμε να πάρουμε και κινούμενη γραφική παράσταση των προσεγγίσεων $1^{ου}$, $3^{ου}$, $5^{ου}$, ..., $11^{ου}$ βαθμού ως εξής :

```
<< Graphics`;
Animate[Plot[Evaluate[Normal[Series[1/(1 - x), {x, 0, n}]]],
  {x, -5, 5}, PlotRange -> {-1, 1}], {n, 1, 11, 2}]
```





....



Κάνοντας διπλό κλίκ σε οποιαδήποτε από τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις έχουμε την συνεχή εναλλαγή των απεικονίσεων των προσεγγιστικών πολυωνύμων.

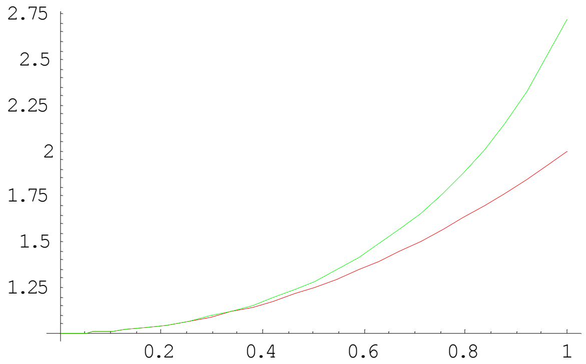
Παράδειγμα 2. Να υπολογίσετε τους 3 πρώτους όρους του αναπτύγματος Maclaurin της συνάρτησης $f(x) = e^{x^2}$. Να υπολογίσετε το λάθος που θα προκύψει E_3 παίρνοντας τους 3 πρώτους όρους του αναπτύγματος Maclaurin στο κλειστό διάστημα [0,1] και να γίνει η γραφική παράσταση του λάθους. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα του αναπτύγματος Maclaurin που υπολογίσατε στο διάστημα [0,1].

Απάντηση. Παρόμοια με το προηγούμενο παράδειγμα έχουμε :

```
s[x_] := Evaluate[Normal[Series[E^x^2, {x, 0, 3}]]]
s[x]
1 + x^2
```

Παρακάτω δίνουμε την γραφική παράσταση της $f(x) = e^{x^2}$ (πράσινο χρώμα) και του αναπτύγματος Maclaurin (κόκκινο χρώμα)

```
Plot[{s[x], E^(x^2)}, {x, 0, 1},
 PlotStyle→ {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0]}]
```



Το μέγιστο λάθος το έχουμε στο x=1 όπως φαίνεται στο παραπάνω σχήμα και είναι

```
Minimize[s[x] - E^(x^2), 0 ≤ x ≤ 1, {x}] // N
{-0.718282, {x → 1.}}
```

Δεν υπάρχει αναλυτικός τύπος για το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f\left(x\right)=e^{x^2}$. Αντίθετα το ολοκλήρωμα αυτό μπορεί να προσεγγισθεί από το ολοκλήρωμα του αναπτύγματος Maclaurin όπως παρακάτω :

```
s1[x_] := Evaluate[Integrate[s[x], x]]
s1[x]
```

$$x+\frac{x^3}{3}$$

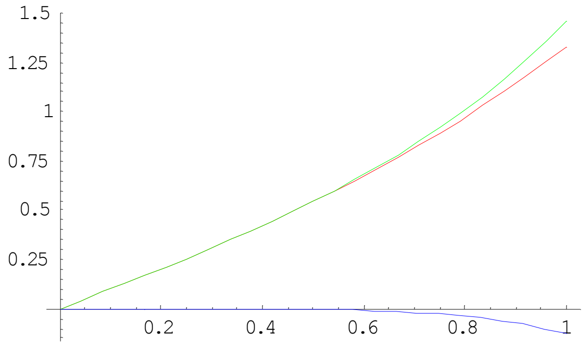
Η προσέγγιση του ολοκληρώματος στο Mathematica είναι :

```
g1[k_] := Integrate[E^(x^2), {x, 0, k}]
g1[k]
```

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\text{Erfi}[k]$$

Παρακάτω δίνουμε την γραφική παράσταση του ολοκληρώματος που βρήκαμε με την προσέγγιση πολυωνύμου 3^{ου} βαθμού (κόκκινο χρώμα), του ολοκληρώματος όπως το προσεγγίζει το Mathematica (πράσινο χρώμα), και τέλος του λάθους μεταξύ των 2 αυτών συναρτήσεων στο διάστημα [0,1].

```
Plot[{s1[x], g1[x], s1[x] - g1[x]}, {x, 0, 1},
 PlotStyle→ {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1]}]
```



Το μέγιστο λάθος από ότι φαίνεται το έχουμε για x=1 και είναι το εξής :

```
Abs[s1[1] - g1[1]] // N
0.129318
```

Δοκιμάστε να πάρετε το ανάπτυγμα MacLaurin $5^{ου}$ βαθμού της συνάρτησης και να υπολογίσετε τα αντίστοιχα μεγέθη.

Παράδειγμα 3. Να υπολογίσετε το ανάπτυγμα MacLaurin της $f(x)=(x+1)^5$.

Απάντηση.

```
Normal[Series[(x + 1)^5, {x, 0, 5}]]
```

$1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$

ή

```
Expand[(x + 1)^5]
```

$1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$

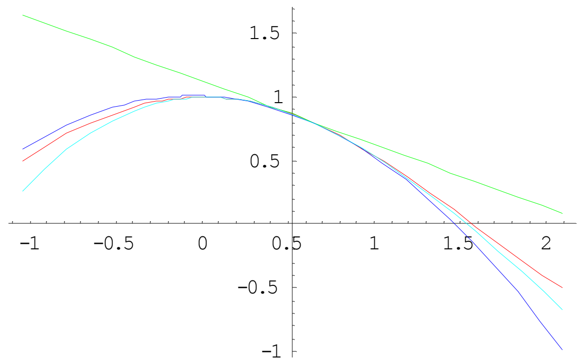
Παράδειγμα 4. Να αναπτύξετε το sin(x) στο σημείο π/6.
Απάντηση. Το ανάπτυγμα $5^{ου}$ βαθμού είναι

```
Normal[Series[Cos[x], {x, π/6, 5}]]
```

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \frac{1}{4}\sqrt{3}\left(-\frac{\pi}{6} + x\right)^2 + \frac{1}{12}\left(-\frac{\pi}{6} + x\right)^3 + \frac{\left(-\frac{\pi}{6} + x\right)^4}{16\sqrt{3}} - \frac{1}{240}\left(-\frac{\pi}{6} + x\right)^5$$

ενώ μια σύγκριση μεταξύ της Cos[x] και των προσεγγίσεων $1^{ου}$, $2^{ου}$ και $3^{ου}$ βαθμού φαίνεται παρακάτω

```
s1 = Normal[Series[Cos[x], {x, π/6, 1}]];
s2 = Normal[Series[Cos[x], {x, π/6, 2}]];
s3 = Normal[Series[Cos[x], {x, π/6, 3}]];
Plot[{Cos[x], s1, s2, s3}, {x, π/6 - π/2, π/6 + π/2}, AxesOrigin → {π/6, 0},
  PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1], RGBColor[0, 1, 1]}]
```



κόκκινο χρώμα : Cos[x]

πράσινο χρώμα : προσέγγιση 1ου βαθμού

μπλέ σκούρο χρώμα : : προσέγγιση 2ου βαθμού

μπλέ ανοικτό χρώμα : : προσέγγιση 3ου βαθμού

12. Σειρές Fourier.

Παράδειγμα 1. Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η συνάρτηση $f(x)=x^2$ στο διάστημα [-π,π).

Απάντηση.

Το ανάπτυγμα που ψάχνουμε είναι της μορφής :

$$F_k(x)=A_0+\sum_{n=1}^{k}\left(A_n\cos(nx)+B_n\sin(nx)\right)$$

όπου

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_n(x)\,dx$$

$$A_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_n(x)\cos(kx)\,dx \quad 1\le k\le n$$

$$B_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_n(x)\sin(kx)\,dx \quad 1\le k\le n$$

Ορίζουμε λοιπόν στο Mathematica τους παραπάνω τύπους :

```
a[0] := (1/(2*π)) Integrate[f[x], {x, -π, π}]
a[k_] := (1/π)*Integrate[f[x]*Cos[k*x], {x, -π, π}]
b[k_] := (1/π)*Integrate[f[x]*Sin[k*x], {x, -π, π}]
F[x_, K_] := a[0] + Sum[a[k]*Cos[k*x] + b[k]*Sin[k*x], {k, 1, K}]
```

Η γραφική παράσταση του παραπάνω αναπτύγματος $F_k(x)$ στο [-π,α) δίνεται από την συνάρτηση :

```
p[K_, a_] := Plot[Evaluate[F[x, K], {x, -π, a}, PlotRange → All, PlotPoints → 200]]
```

Αν ορίσουμε λοιπόν ως $f(x)=x^2$

```
f[x_] := x^2
```

θα έχουμε

```
a[0]
```

$$\frac{\pi^2}{3}$$

```
Simplify[a[k]]
```

$$\frac{4\,k\,\pi\,\mathrm{Cos}[k\,\pi]+2\,(-2+k^2\,\pi^2)\,\mathrm{Sin}[k\,\pi]}{k^3\,\pi}$$

```
Simplify[b[k]]
```

0

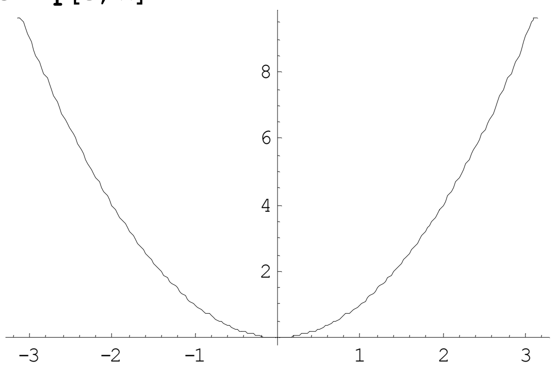
Συνεπώς η σειρά Fourier αν πάρουμε 3 όρους για παράδειγμα θα είναι

```
F[x, 3]
```

$$\frac{\pi^2}{3} - 4\,\mathrm{Cos}[x] + \mathrm{Cos}[2\,x] - \frac{4}{9}\,\mathrm{Cos}[3\,x]$$

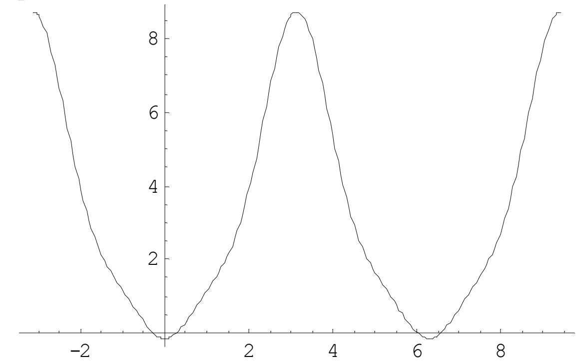
Παρακάτω δίνουμε την γραφική παράσταση της σειράς Fourier $F_3(x)$ (με 3 όρους) στο διάστημα [-π,π)

s1 = p[3, π]



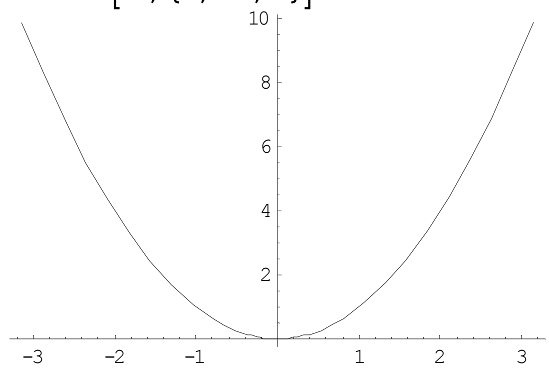
και στο διάστημα [-π,3π)

p[3, 3 * π]

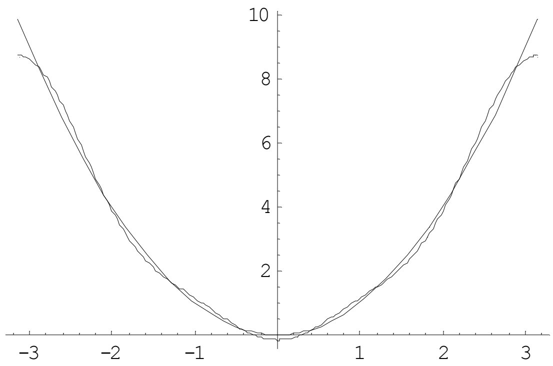


ή των δύο συναρτήσεων μαζί f(x) και $F_3(x)$

s2 = Plot[x^2, {x, -π, π}]

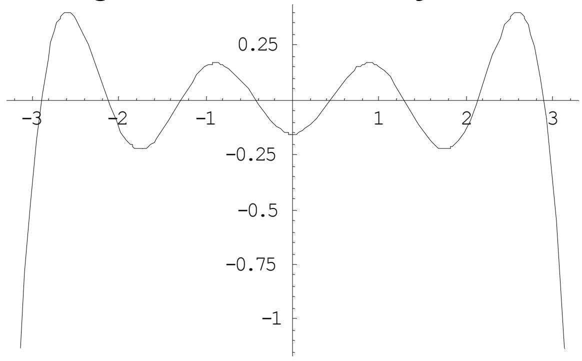


Show[{s1, s2}]



Η γραφική παράσταση της διαφοράς των δύο συναρτήσεων (λάθους) είναι η παρακάτω :

```
Plot[π^2/3 - 4 Cos[x] + Cos[2 x] - 4/9 Cos[3 x] - x^2, {x, -π, π}]
```



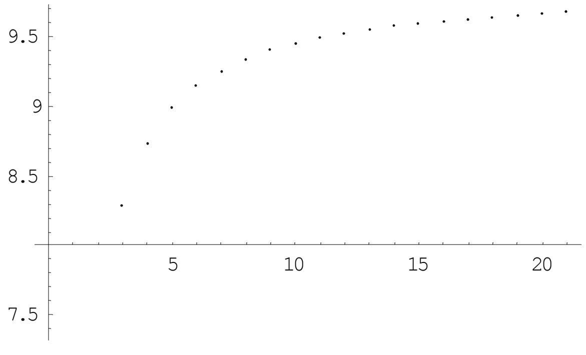
Η συνάρτηση f(x) και η σειρά Fourier έχουν το ίδιο ορισμένο ολοκλήρωμα στο διάστημα [-π,π).

```
Integrate[π^2/3 - 4 Cos[x] + Cos[2 x] - 4/9 Cos[3 x] - x^2, {x, -π, π}]
0
```

Παρακάτω δίνουμε μια λίστα με την προσέγγιση $F_k(\pi)$ όταν κ=1,2,...,20

```
Table[F[π, k], {k, 0, 20}] // N
{3.28987, 7.28987, 8.28987, 8.73431, 8.98431, 9.14431, 9.25542, 9.33706, 9.39956, 9.44894,
 9.48894, 9.522, 9.54977, 9.57344, 9.59385, 9.61163, 9.62725, 9.6411, 9.65344, 9.66452, 9.67452}
```

```
ListPlot[%]
```



Παρατηρούμε ότι το $F_k(\pi)$ συγκλίνει προς μια τιμή π.χ. για k=1000 έχουμε

```
F[π, 1000] // N
9.86561
```

Η τιμή αυτή είναι κατά προσέγγιση ίση με

```
(1/2) * (f[-π] + f[π]) // N
9.8696
```

Παράδειγμα 2. Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η συνάρτηση $f(x)=|x|$ στο διάστημα [-2,2).

Απάντηση. Παρόμοια με την προηγούμενη άσκηση έχουμε :

$$F_k(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{k}\left(A_n \cos(nx) + B_n \sin(nx)\right)$$

όπου

$$A_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} F_n(x)\,dx$$

$$A_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} F_n(x)\cos(kx)\,dx \quad 1 \le k \le n$$

$$B_k = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} F_n(x)\sin(kx)\,dx \quad 1 \le k \le n$$

Ορίζουμε λοιπόν στο Mathematica τους παραπάνω τύπους :

```
a[0] := (1/(2*2)) Integrate[f[x], {x, -2, 2}]
a[k_] := (1/2) * Integrate[f[x] * Cos[k * x], {x, -2, 2}]
b[k_] := (1/2) * Integrate[f[x] * Sin[k * x], {x, -2, 2}]
F[x_, K_] := a[0] + Sum[a[k] * Cos[k * x] + b[k] * Sin[k * x], {k, 1, K}]
```

Η γραφική παράσταση του παραπάνω αναπτύγματος $F_k(x)$ στο [-2,2) δίνεται από την συνάρτηση :

```
p[K_, a_] := Plot[Evaluate[F[x, K], {x, -2, a}, PlotRange → All, PlotPoints → 200]]
```

Αν ορίσουμε λοιπόν ως $f(x)=|x|$

```
f[x_] := Abs[x]
```

θα έχουμε

```
a[0]
1
```

```
Simplify[a[k]]
```

$$\frac{2\,(2\,k\,\mathrm{Cos}[k] - \mathrm{Sin}[k])\,\mathrm{Sin}[k]}{k^2}$$

```
Simplify[b[k]]
0
```

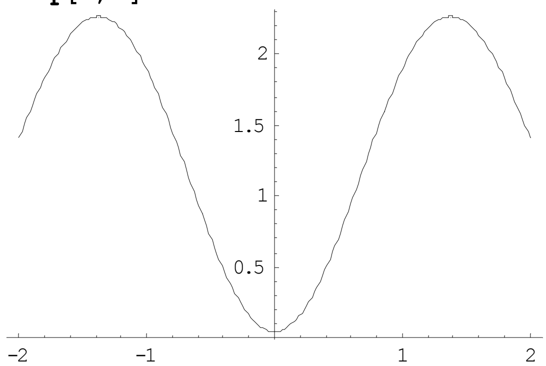
Συνεπώς η σειρά Fourier αν πάρουμε 3 όρους για παράδειγμα θα είναι

```
F[x, 3]
```

$$1+\mathrm{Cos}[x]\ (-1+\mathrm{Cos}[2]+2\,\mathrm{Sin}[2])+\frac{1}{4}\mathrm{Cos}[2\,x]\ (-1+\mathrm{Cos}[4]+4\,\mathrm{Sin}[4])+\frac{1}{9}\mathrm{Cos}[3\,x]\ (-1+\mathrm{Cos}[6]+6\,\mathrm{Sin}[6])$$

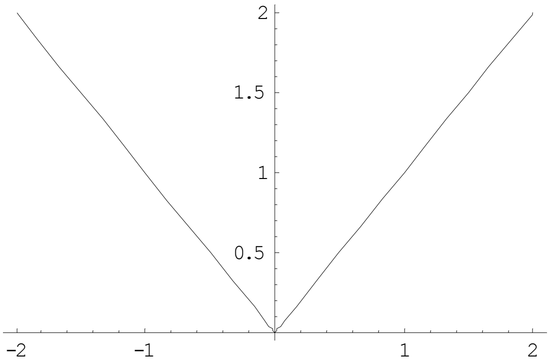
Παρακάτω δίνουμε την γραφική παράσταση της σειράς Fourier $F_3(x)$ (με 3 όρους) στο διάστημα [-2,2)

```
s1 = p[3, 2]
```

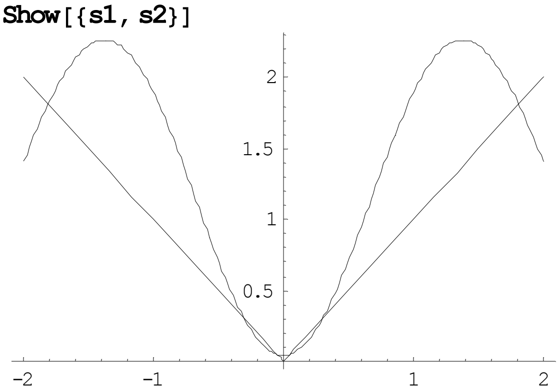


ή των δύο συναρτήσεων μαζί f(x) και $F_3(x)$

```
s2 = Plot[Abs[x], {x, -2, 2}]
```

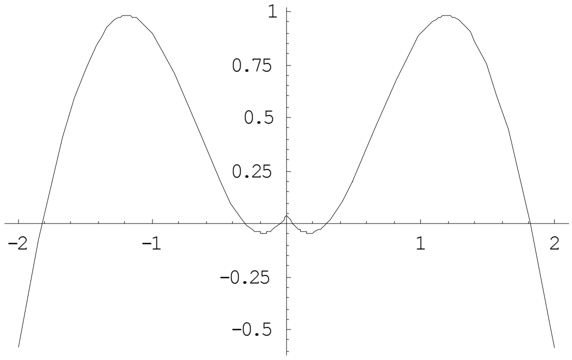



```
Show[{s1, s2}]
```



Η γραφική παράσταση της διαφοράς των δύο συναρτήσεων (λάθους) είναι η παρακάτω :

```
Plot[1 + Cos[x] (-1 + Cos[2] + 2 Sin[2]) + 1/4 Cos[2 x] (-1 + Cos[4] + 4 Sin[4]) +
  1/9 Cos[3 x] (-1 + Cos[6] + 6 Sin[6]) - Abs[x], {x, -2, 2}]
```

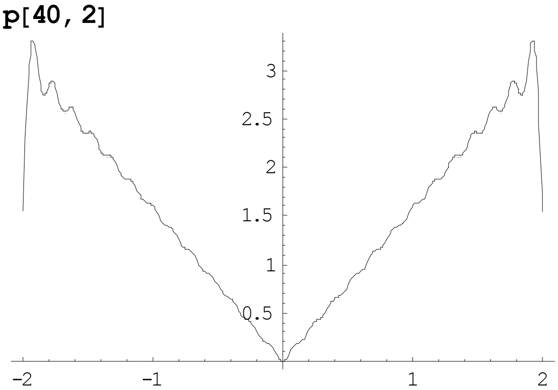


Η συνάρτηση f(x) και η σειρά Fourier έχουν το ίδιο ορισμένο ολοκλήρωμα στο διάστημα [-2,2).

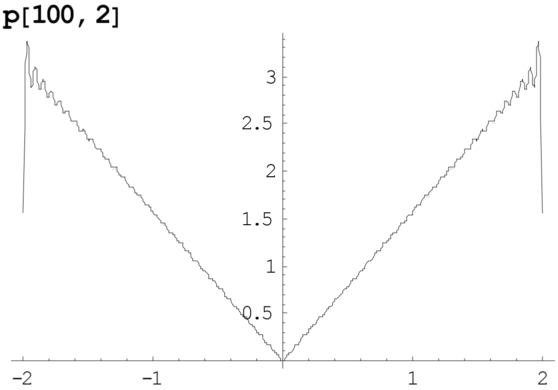
```
Integrate[1 + Cos[x] (-1 + Cos[2] + 2 Sin[2]) + 1/4 Cos[2 x] (-1 + Cos[4] + 4 Sin[4]) +
  1/9 Cos[3 x] (-1 + Cos[6] + 6 Sin[6]) - Abs[x], {x, -π, π}] // N
-3.58642
```

Παρακάτω δίνουμε την γραφική παράσταση της σειράς $F_{40}(x)$ και $F_{100}(x)$ στο [-2,2)

```
p[40, 2]
```



```
p[100, 2]
```



Επιπλέον δυνατότητες για ανάλυση Fourier συναρτήσεων μας δίνει το πακέτο <<Calculus`FourierTransform` του Mathematica.

Παράδειγμα 3. Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η συνάρτηση $f(x)=1$ στο διάστημα [1,3).
Απάντηση. Παρόμοια με την προηγούμενη άσκηση έχουμε :

$$F_k(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{k}\left(A_n\cos(nx) + B_n\sin(nx)\right)$$

όπου

$$A_0 = \frac{1}{B-A}\int_A^B F_n(x)\,dx$$

$$A_k = \frac{2}{B-A}\int_A^B F_n(x)\cos(kx)\,dx \quad 1 \le k \le n$$

$$B_k = \frac{2}{B-A}\int_A^B F_n(x)\sin(kx)\,dx \quad 1 \le k \le n$$

Ορίζουμε λοιπόν στο Mathematica τους παραπάνω τύπους :

```
a[0] := (1/(3-1)) Integrate[f[x], {x, 1, 3}]
a[k_] := (2/(3-1)) * Integrate[f[x] * Cos[k*x], {x, 1, 3}]
b[k_] := (2/(3-1)) * Integrate[f[x] * Sin[k*x], {x, 1, 3}]
F[x_, K_] := a[0] + Sum[a[k] * Cos[k*x] + b[k] * Sin[k*x], {k, 1, K}]
```

Η γραφική παράσταση του παραπάνω αναπτύγματος $F_k(x)$ στο [1,3) δίνεται από την συνάρτηση :

```
p[K_, a_] := Plot[Evaluate[F[x, K], {x, 1, a}, PlotRange → All, PlotPoints → 200]]
```

Αν ορίσουμε λοιπόν ως $f(x)=1$

```
f[x_] := 1
```

θα έχουμε

```
a[0]
1

Simplify[a[k]]
```

$$\frac{-\mathrm{Sin}[k] + \mathrm{Sin}[3\,k]}{k}$$

```
Simplify[b[k]]
```

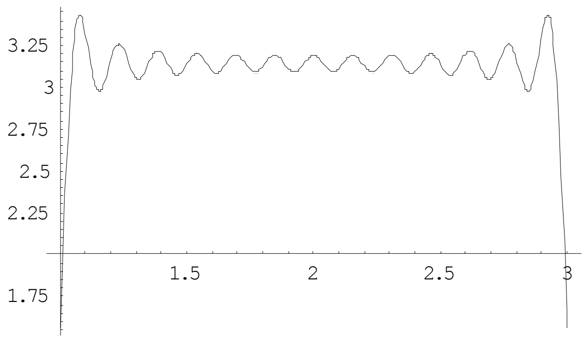
$$\frac{4\,\mathrm{Cos}[k]\,\mathrm{Sin}[k]^2}{k}$$

Συνεπώς η σειρά Fourier αν πάρουμε 3 όρους για παράδειγμα θα είναι

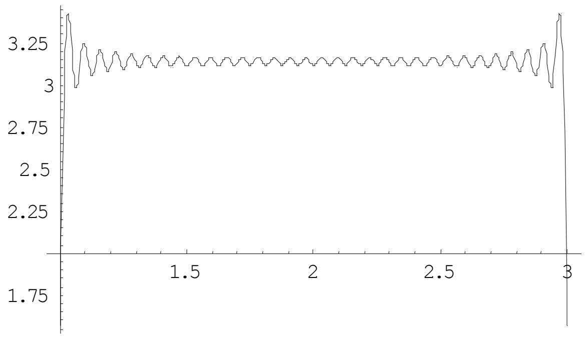
```
F[x, 3] // N
1. - 0.700351 Cos[x] - 0.594356 Cos[2. x] + 0.0903328 Cos[3. x] +
  1.53029 Sin[x] - 0.688159 Sin[2. x] - 0.0262874 Sin[3. x]
```

Παρακάτω δίνουμε την γραφική παράσταση της σειράς $F_{40}\left(x\right)$ και $F_{100}\left(x\right)$ στο [1,3)

p[40, 3]



p[100, 3]



13. Εισαγωγή στις διαφορικές εξισώσεις.

Παράδειγμα 1. Να επιλύσετε την παρακάτω διαφορική εξίσωση :

$$x^2 \frac{dy}{dx} = y^2 + 2xy, x \neq 0$$

Απάντηση. Χρησιμοποιούμε την συνάρτηση DSolve[διαφορική εξίσωση, συνάρτηση, μεταβλητή]

```
DSolve[x^2 D[y[x], x] == y[x]^2 + 2 x y[x], y[x], x]
```

$$\left\{\left\{y[x] \to -\frac{x^2}{x - C[1]}\right\}\right\}$$

Παράδειγμα 2. Να επιλύσετε την παρακάτω διαφορική εξίσωση :

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 2x$$

με αρχική συνθήκη y(0)=1.
Απάντηση. Χρησιμοποιούμε την συνάρτηση DSolve[{διαφορική εξίσωση/εις, αρχικές συνθήκες}, συνάρτηση/εις, μεταβλητή]

```
DSolve[{D[y[x], x] - 2 x y[x] == x, y[0] == 1}, y[x], x]
```

$$\left\{\left\{y[x] \to \frac{1}{2}\left(-1 + 3 e^{x^2}\right)\right\}\right\}$$

Παράδειγμα 3. Να επιλύσετε την παρακάτω διαφορική εξίσωση :

$$\frac{d^2y}{dx} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = \sin(x)$$

με αρχική συνθήκη $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

Απάντηση.

```
DSolve[{D[y[x], {x, 2}] - 5 D[y[x], x] + 6 y[x] == Sin[x], y[0] == 0, y'[0] == 1}, y[x], x]
```

$$\left\{\left\{y[x] \to \frac{1}{10}\left(-12 e^{2x} + 11 e^{3x} + Cos[x] + Sin[x]\right)\right\}\right\}$$

Παράδειγμα 4. Να επιλύσετε το παρακάτω σύστημα διαφορικών εξισώσεων :

$$\frac{dy_1(x)}{dx} = -3y_1(x) + 2y_2(x)$$

$$\frac{dy_2(x)}{dx} = -2y_1(x) + y_2(x)$$

με αρχικές συνθήκες $y_1(0) = 1, y_2(0) = 2$.

Απάντηση. Χρησιμοποιούμε την συνάρτηση DSolve[{διαφορική εξίσωση/εις, αρχικές συνθήκες}, συνάρτηση/εις, μεταβλητή]

```
DSolve[
 {D[y1[x], x] == -3 y1[x] + 2 y2[x],
  D[y2[x], x] == -2 y1[x] + y2[x],
  y1[0] == 1,
  y2[0] == 2},
 {y1[x], y2[x]}, x]
{{y1[x] → e^-x (1 + 2 x), y2[x] → 2 e^-x (1 + x)}}
```

Παράδειγμα 5. Να υπολογισθούν οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων :

$$\sin(ax), \cos(ax), 1, x^2$$

Απάντηση. Χρησιμοποιούμε την συνάρτηση LaplaceTransform[f(x),x,s]

```
LaplaceTransform[Sin[a x], x, s]
```

$$\frac{\sqrt{a^2}\ \text{Sign}[a]}{a^2 + s^2}$$

```
LaplaceTransform[Cos[a x], x, s]
```

$$\frac{s}{a^2 + s^2}$$

```
LaplaceTransform[x^2, x, s]
```

$$\frac{2}{s^3}$$

και πιο γενικά

```
LaplaceTransform[x^n, x, s]
```

$s^{-1-n}\ \text{Gamma}[1 + n]$

Παράδειγμα 6. Να υπολογισθούν οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων :

$$\frac{1}{s^2+9}, \frac{s^2-5s+6}{s^2+2s+1}$$

Απάντηση. Χρησιμοποιούμε την συνάρτηση InverseLaplaceTransform[f(x),s,x]

$$\text{InverseLaplaceTransform}\left[\frac{1}{s^2 + 9}, s, x\right]$$

$$\frac{1}{3}\ \text{Sin}[3 x]$$

$$\text{InverseLaplaceTransform}\left[\frac{s^2 - 5 s + 6}{s^2 + 2 s + 1}, s, x\right]$$

$e^{-x} (-7 + 12 x) + \text{DiracDelta}[x]$

Παράδειγμα 7. Να επιλύσετε την παρακάτω διαφορική εξίσωση :

$$\frac{d^2y}{dx} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = \sin(x)$$

με αρχική συνθήκη $y(0)=0, y'(0)=1$ με την βοήθεια των μετασχηματισμών Laplace.

Απάντηση. Παίρνουμε μετασχηματισμούς Laplace στο αριστερό μέλος της εξίσωσης

```
LaplaceTransform[D[y[x], {x, 2}] - 5 D[y[x], x] + 6 y[x], x, s] /. {y[0] → 0, y'[0] → 1} // Simplify
```

$-1 + (6 - 5 s + s^2)$ LaplaceTransform[y[x], x, s]

και στο δεξιά μέρος της εξίσωσης

```
LaplaceTransform[Sin[x], x, s]
```

$$\frac{1}{1 + s^2}$$

και λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει

$$\text{Solve}\left[-1 + (6 - 5 s + s^2)\, y == \frac{1}{1 + s^2},\ y\right]$$

$$\left\{\left\{y \to \frac{2 + s^2}{(1 + s^2)\ (6 - 5 s + s^2)}\right\}\right\}$$

της οποίας ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace είναι ο παρακάτω :

$$\text{InverseLaplaceTransform}\left[\frac{2 + s^2}{(1 + s^2)\ (6 - 5 s + s^2)},\ s,\ x\right]$$

$$\frac{1}{10}\ (e^{2 x}\ (-12 + 11\, e^{x}) + \text{Cos}[x] + \text{Sin}[x])$$

Για τον υπολογισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace με το χέρι θα πρέπει να αναλύσουμε το κλάσμα σε μερικά κλάσματα, το οποίο στο Mathematica γίνεται μέσω της εντολής Apart[]

$$\text{Apart}\left[\frac{2 + s^2}{(1 + s^2)\ (6 - 5 s + s^2)}\right]$$

$$\frac{11}{10\ (-3 + s)} - \frac{6}{5\ (-2 + s)} + \frac{1 + s}{10\ (1 + s^2)}$$

14. Εισαγωγή στις Πιθανότητες.

Παράδειγμα 1. Δίνεται το παρακάτω σύνολο αριθμών :

S={74,100,55,70,39,98,79,78,33,88,92,73,86,91,92,69,41,88,96,87,56}

οι οποίοι αποτελούν τους βαθμούς εργασιών φοιτητών.

(α) Να υπολογισθεί ο μέσος όρος $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$ και η τυπική απόκλιση $s = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(x_j - \overline{x}\right)^2}{n-1}}$ των παραπάνω αριθμών.

(β) Να γίνει ιστόγραμμα των παραπάνω αριθμών σε διαστήματα μήκους 10.

Απάντηση.

(α) Πρώτα δημιουργούμε την λίστα με τους παραπάνω αριθμούς :

```
S = {74, 100, 55, 70, 39, 98, 79, 78, 33, 88, 92, 73, 86, 91, 92, 69, 41, 88, 96, 87, 56}
{74, 100, 55, 70, 39, 98, 79, 78, 33, 88, 92, 73, 86, 91, 92, 69, 41, 88, 96, 87, 56}
```

Στη συνέχεια καλούμε το πακέτο <<Statistics`DescriptiveStatistics` και μέσω των συναρτήσεων Mean[] και Variance[] υπολογίζουμε τον μέσο όρο και την απόκλιση s^2 και στη συνέχεια την τυπική απόκλιση $\sqrt{s^2}$.

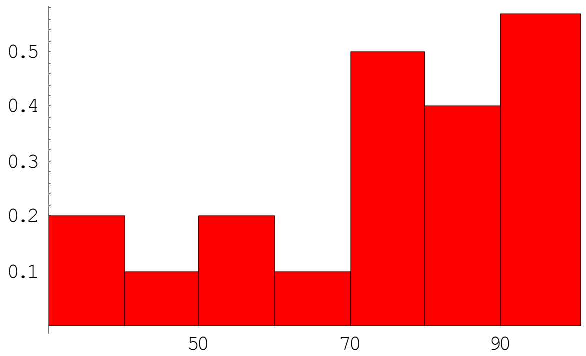
```
<< Statistics`DescriptiveStatistics`
N[Mean[S]]
75.4762
N[Variance[S]]
404.762
Sqrt[%]
20.1187
```

ή

```
StandardDeviation[S] // N
20.1187
```

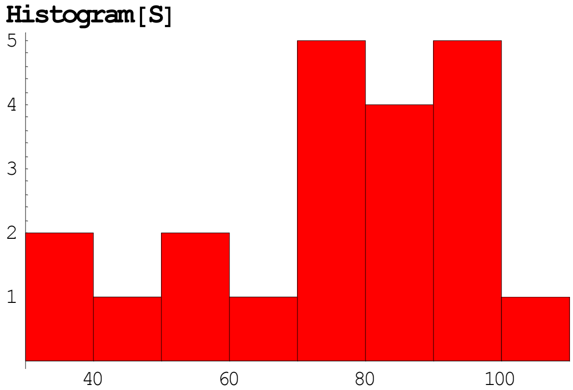
(β) Καλούμε το πακέτο <<Graphics`Graphics` και στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την συνάρτηση Histogram[].

```
<< Graphics`Graphics`
Histogram[S, Ticks → IntervalBoundaries, HistogramScale → Length[S],
  HistogramCategories → {10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100.5}]
```



Η επιλογή HistogramCategories είναι προαιρετική και στόχος της είναι ο χωρισμός των διαστημάτων σύμφωνα με τις επιλογές μας. Length[S] είναι το μήκος της λίστας και η επιλογή HistogramScale->Length[S] φροντίζει ώστε το εμβαδόν κάτω από το ιστόγραμμα να είναι ίσο με 1. Παρακάτω δίνουμε τι θα γινόταν αν δεν είχαμε πάρει τις επιλογές αυτές :

```
Histogram[S]
```



Παράδειγμα 2. Η πιθανότητα να φέρουμε 6 όταν ρίχνουμε ένα ζάρι είναι 1/6. Ποια η πιθανότητα να φέρουμε 6 στις 2 από τις επόμενες 5 φορές που θα ρίξουμε ένα ζάρι.
Απάντηση. Με την υπόθεση ότι τα τεστ είναι ανεξάρτητα και p=1/6 για κάθε μια από τις n=5 προσπάθειες, τότε η πιθανότητα να πετύχουμε x=2 φορές το 6 είναι σύμφωνα με την διωνυμική κατανομή :

$$f(x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}$$

το οποίο σύμφωνα με το Mathematica είναι :

$$\texttt{f[x\_, p\_, n\_] := Binomial[n, x]}\ p^{x}\ (1-p)^{n-x}$$

$$\texttt{N[f[2, }\frac{1}{6}\texttt{, 5]]}$$

Αν θέλαμε την πιθανότητα να πετύχουμε 6 έως και 2 φορές τότε θα έπρεπε να υπολογίσουμε το f(0)+f(1)+f(2) δηλαδή :

$$\texttt{N[Sum[f[x, }\frac{1}{6}\texttt{, 5], \{x, 0, 2\}]]}$$

```
0.964506
```

Παράδειγμα 3. Η πιθανότητα να επιζήσει ένας ασθενής από μια σπάνια αρρώστια του αίματος είναι 0.4. Εάν είναι γνωστό ότι 15 άτομα έχουν προσβληθεί από την αρρώστια αυτή ποια είναι η πιθανότητα να επιζήσουν τουλάχιστον 10.

Απάντηση. Η πιθανότητα να επιζήσουν x=10 ασθενείς, από τους n=15, όταν η πιθανότητα επιβίωσης είναι p=0.4 δίνεται από τον τύπο της διωνυμικής κατανομής

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Επειδή όμως εμείς θέλουμε τουλάχιστον 10 ασθενείς, δηλ. 10 ή 11 ή 12 ή 13 ή 14 ή 15 θα πάρουμε f(10)+f(11)+…+f(15) δηλ.

```
f[x_, p_, n_] := Binomial[n, x] p^x (1 - p)^(n-x)
N[Sum[f[x, 0.4, 15], {x, 10, 15}]]
0.0338333
```

Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε κατευθείαν και την συνάρτηση BinomialDistribution[] από το πακέτο <<Statistics`DiscreteDistributions`

```
<< Statistics`DiscreteDistributions`
b = BinomialDistribution[15, 0.4]
Sum[PDF[b, j], {j, 10, 15}]
0.0338333
```

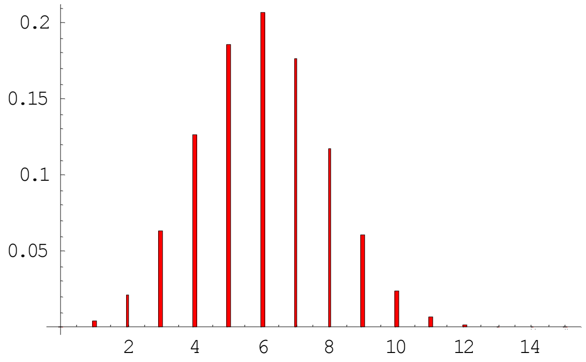
Παραπάνω ορίσαμε την διωνυμική κατανομή με πιθανότητα p=0.4 και n=15 δοκιμές. Στη συνέχεια χρησιμοποιήσαμε την PDF που χρησιμοποιούμε σε διακριτές κατανομές για να βρούμε το άθροισμα των πιθανοτήτων f(j) για j=10,11,…,15. Έναν πίνακα με τις πιθανότητες f(0), f(1), … βλέπουμε παρακάτω :

```
Table[{j, PDF[b, j]}, {j, 0, 15}] // TableForm
```

0	0.000470185
1	0.00470185
2	0.021942
3	0.0633879
4	0.126776
5	0.185938
6	0.206598
7	0.177084
8	0.118056
9	0.0612141
10	0.0244856
11	0.00741989
12	0.00164886
13	0.000253672
14	0.0000241592
15	1.07374×10^{-6}

Ένα διάγραμμα των παραπάνω ζευγαριών μπορούμε να πετύχουμε με την συνάρτηση GeneralizedBarChart[] από το πακέτο <<Graphics`Graphics`

```
<< Graphics`Graphics`
GeneralizedBarChart[Table[{j, PDF[b, j], 0.1}, {j, 0, 15}]]
```



Το 0.1 που προστέθηκε στον παραπάνω πίνακα (θα μπορούσε να είναι οποιοσδήποτε αριθμός μεταξύ 0 και 1) μας δίνει το πλάτος της κάθε μπάρας στο παραπάνω διάγραμμα. Ο μέσος όρος και η τυπική απόκλιση της παραπάνω κατανομής είναι :

```
Mean[BinomialDistribution[15, 0.4]]
6.
Variance[BinomialDistribution[15, 0.4]]
3.6
```

Με τον παρακάτω πίνακα παίρνουμε την αθροιστική κατανομή για j=0,1,2,…,15 :

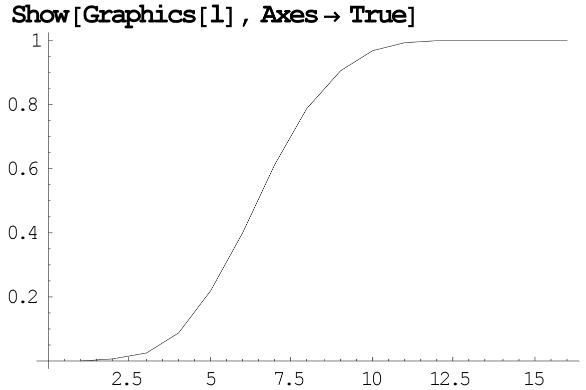
```
Seq = Table[CDF[b, j], {j, 0, 15}]
{0.000470185, 0.00517203, 0.027114, 0.0905019, 0.217278, 0.403216, 0.609813,
 0.786897, 0.904953, 0.966167, 0.990652, 0.998072, 0.999721, 0.999975, 0.999999, 1}
```

Με τον παρακάτω τρόπο δημιουργούμε την γραφική παράσταση της αθροιστικής κατανομής :

```
g = Table[{{x, Seq[[x]]}, {x + 1, Seq[[x + 1]]}}, {x, 0, 15}];
```
(Ορισμός διαδοχικών ζευγαριών σημείων)

```
g1 = Join[Flatten[g, 1], {{16, 1}}];
```
(παίρνουμε απλά ζευγάρια σημείων π.χ. {},{} αντί {{},{}}, και προσθέτουμε το ζεύγος (16,1))

```
l = Line[g1];
```
(ενώνουμε τα διαδοχικά αυτά ζεύγη με μια γραμμή)

```
Show[Graphics[l], Axes → True]
```


Παράδειγμα 4. Από μια γέφυρα περνούν κατά μέσο όρο 300 αυτοκίνητα την ώρα. Να βρεθεί η πιθανότητα ότι κατά την διάρκεια των 2 λεπτών θα περάσουν από την γέφυρα 3 αυτοκίνητα.
Απάντηση. Δεχόμαστε τις παρακάτω υποθέσεις :

(α) η πιθανότητα ότι ένα αυτοκίνητο θα περάσει την γέφυρα στο χρονικό διάστημα (t,t+δ) είναι προσεγγιστικά ανάλογο με το μήκος του διαστήματος δηλ. P(αυτοκίνητο θα περάσει στο διάστημα (t,t+δ))=νδ+ο(δ), όπου ν σταθερός αριθμός και $\lim_{\delta\to 0}\frac{o(\delta)}{\delta}=0$.
(β) η πιθανότητα να περάσουν δύο ή περισσότερα αυτοκίνητα σε ένα μικρό διάστημα είναι αμελητέα, δηλαδή P(τουλάχιστον δύο αυτοκίνητα θα περάσουν στο διάστημα (t,t+δ))= ο(δ).
(γ) ο αριθμός των αυτοκινήτων που θα περάσουν σε 2 ξένα μεταξύ τους χρονικά διαστήματα είναι ανεξάρτητα γεγονότα,

Αν ν ο μέσος όρος των αυτοκινήτων ανά λεπτό τότε σε t=60 λεπτά ο αριθμός των αυτοκινήτων X(60) ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λ=60ν. Επειδή στην κατανομή Poisson η μέση τιμή ισούμε με την παράσταση λ=60ν και μας δίνεται λ=300 γι'αυτό ν=300/60=5. Για t=2 λεπτά θα έχουμε

$$P\left(X(2)=3\right)=e^{-2\nu}\frac{(2\nu)^3}{3!}=e^{-10}\frac{10^3}{3!}\approx 0.008$$

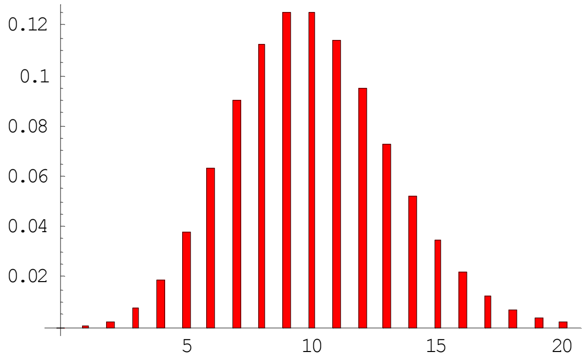
Η συνάρτηση πιθανότητας λοιπόν στην Poisson κατανομή είναι

$$P(x)=e^{-\mu}\frac{\mu^x}{x!}$$

Στο Mathematica η Poisson κατανομή δίνεται από την συνάρτηση PoissonDistribution[] και εντελώς ανάλογα με το προηγούμενο παράδειγμα θα έχουμε:

```
p = PoissonDistribution[10]
PoissonDistribution[10]
```
(αφού μ=10)
```
N[PDF[p, 3]]
0.00756665
```
(αφού x=3)

Παρακάτω δίνουμε την γραφική παράσταση της κατανομής
```
s = Table[N[PDF[p, x]], {x, 0, 20}];
s1 = Table[{x, s[[x + 1]], 0.3}, {x, 0, 20}];
GeneralizedBarChart[s1]
```



Παράδειγμα 5. Σε 20 άτομα τα 8 υποστηρίζουν την παράταξη Α. Αν πάρουμε τυχαία 6 άτομα από τα 20, ποια η πιθανότητα τα 3 να υποστηρίζουν την παράταξη Α ;
Απάντηση. Έχουμε την υπεργεωμετρική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας :

$$p(x)=\frac{\binom{K}{x}\binom{N-K}{n-x}}{\binom{N}{n}}, K=8, N=20, n=6$$

και συνεπώς

$$p(x)=\frac{\binom{8}{x}\binom{12}{6-x}}{\binom{20}{6}}$$

Άρα η τιμή που ψάχνουμε είναι

$$p(3)=\frac{\binom{8}{3}\binom{12}{3}}{\binom{20}{6}}\approx 0.317853$$

Θα μπορούσαμε να ορίσουμε την υπεργεωμετρική κατανομή μέσω της συνάρτησης HyperGeometricDistribution[n,K,N]

```
h = HypergeometricDistribution[6, 8, 20]
HypergeometricDistribution[6, 8, 20]
N[PDF[h, 3]]
0.317853
```

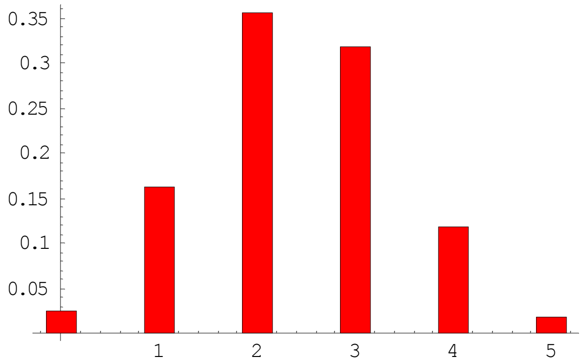
Η μέση τιμή και απόκλιση δίνονται αντίστοιχα :

```
Mean[HypergeometricDistribution[6, 8, 20]] // N
2.4
Variance[HypergeometricDistribution[6, 8, 20]] // N
1.06105
```

Παρακάτω δίνουμε την γραφική παράσταση της κατανομής

```
h1 = Table[N[PDF[h, x]], {x, 0, 5}];
```

```
h2 = Table[{x, h1[[x+1]], 0.3}, {x, 0, 5}];
<< Graphics`
GeneralizedBarChart[h2]
```



Παράδειγμα 6. Το ποσό των χρημάτων που ξοδεύει μια οικογένεια κατά μήνα είναι μια τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή 1000 Ευρώ και τυπική απόκλιση 150 Ευρώ. Ποια είναι η πιθανότητα να ξοδέψει σε ένα μήνα τουλάχιστον 1200 Ευρώ ;

Απάντηση. Αν δεχτούμε ότι η η τυχαία μεταβλητή ακολουθεί την κανονική κατανομή $N\left(1000,150^2\right)$, τότε ζητάμε την

$$P\left(X>1200\right)=1-P\left(X\leq 1200\right)$$

Ορίζουμε την κανονική κατανομή :

```
n = NormalDistribution[1000, 150^2]
NormalDistribution[1000, 22500]
```

Και κάνοντας χρήση της αθροιστικής κατανομής CDF υπολογίζουμε την πιθανότητα αυτή :

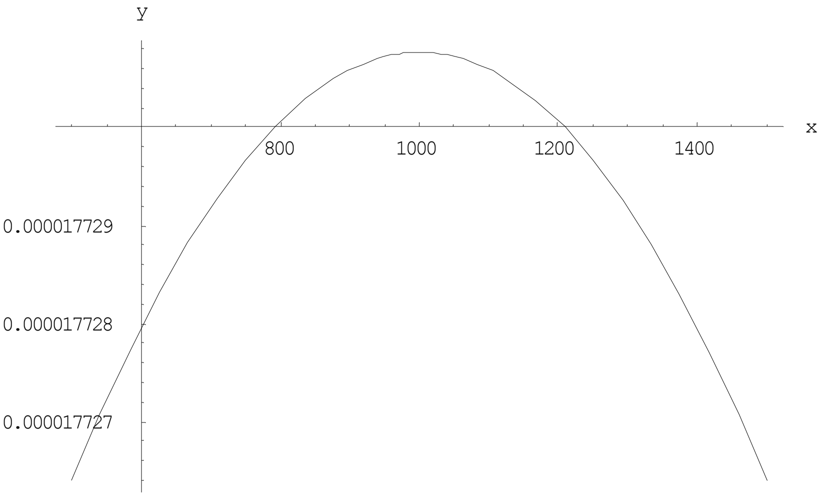
```
1 - N[CDF[n, 1200]]
0.496454
```

Παρακάτω δίνουμε την γραφική παράσταση της παραπάνω κανονικής κατανομής

```
<< Statistics`ContinuousDistributions`
n = NormalDistribution[1000, 150^2]
NormalDistribution[1000, 22500]
s = PDF[n, x]
```

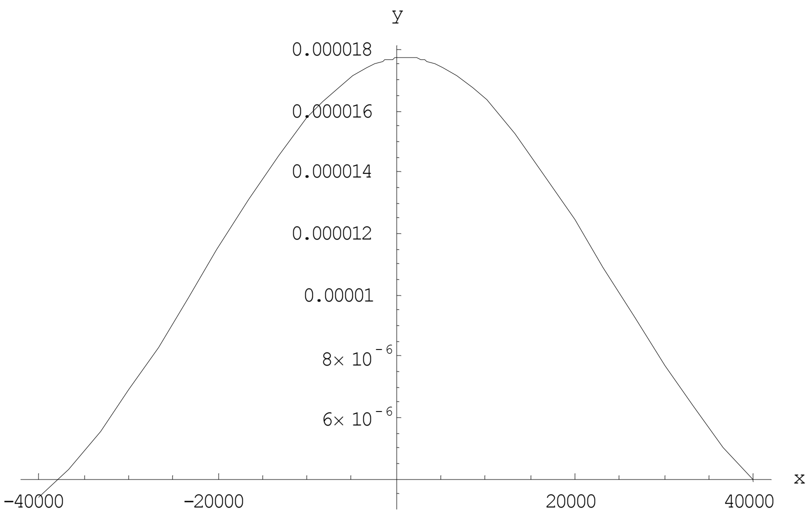
$$\frac{e^{-\frac{(-1000+x)^2}{1012500000}}}{22500\sqrt{2\pi}}$$

```
Plot[s, {x, 500, 1500}, AxesLabel -> {x, y}]
```



ή

Plot[s, {x, -40000, 40000}, AxesLabel → {x, y}]



Παρόμοια η γραφική παράσταση της αθροιστικής κατανομής θα είναι η παρακάτω :

s = CDF[n, x]

$$\frac{1}{2}\left(1+\mathrm{Erf}\left[\frac{-1000+x}{22500\sqrt{2}}\right]\right)$$

Plot[s, {x, -40000, 40000}, AxesLabel → {x, y}, PlotRange → {0, 1}]